

La successió de Fibonacci en la música

Joan Pares i Soler

Educació Secundària Obligatoria

INS Pere Alsius i Torrent

Tutora: Ma. Àngels Picart

Abril 2013

“La música és un exercici aritmètic secret i la persona que s'hi entrega no s'adona que està manipulant números” (W.Leibnitz)

ÍNDEX

- 1.Introducció
- 2.Fibonacci
- 3.Successió de Fibonacci
 - 3.1. La Successió de Fibonacci a la natura
 - 3.2. La Successió de Fibonacci a la ma de l'home
- 4.Nombre d'or (divina proporció)
 - 4.1. El Nombre d'or a la natura
 - 4.2. El Nombre d'or a la ma de l'home
- 5.Les matemàtiques i la música
- 6.La Successió de Fibonacci en la música
 - 6.1. Anàlisi d'una peça musical
- 7.El nombre d'or en la música
 - 7.1. Anàlisi de la estructura d'un violí
- 8.Composició d'una peça musical a través de la successió de Fibonacci
- 9.Enquestes

9.1. Observacions (de les enquestes)

9.2. Conclusions (de les enquestes)

10. Conclusions

11. Bibliografia

1. INTRODUCCIÓ

La raó per la qual he elegit aquest tema per fer el treball és molt simple. Volia fer un treball relacionat amb la música, i la meua tutora del treball de recerca, que és professora de matemàtiques, em va dir que investigués una mica la successió de Fibonacci abans de triar definitivament el tema del treball. Així ho vaig fer. Vaig anar buscant i llegint, i em va sorprendre les qualitats que té. Mai hauria pensat que una successió pogués estar relacionada amb tantes coses. És que, de fet, la successió la trobem a la natura, la pintura, l'arquitectura, la música,... Llegint les propietats de la successió vaig trobar que està relacionada amb el nombre d'or, nombre del qual fins aquell moment tampoc en sabia res. Vaig fer com amb la successió i el vaig anar coneixent, i vaig descobrir que, de manera semblant a la successió de Fibonacci, el nombre d'or és present en molts camps. Com que inicialment el treball el volia fer d'algun tema relacionat amb la música, i vaig descobrir que tant el nombre d'or com la successió de Fibonacci hi tenen relació, vaig decidir fer el treball sobre aquest tema. En el títol només hi he posat la successió, perquè penso que el nombre d'or no cal nomenar-lo, ja que podríem dir que el trobem dins la successió.

La successió de Fibonacci és una successió poc estudiada, ja que s'ha de tenir un nivell elevat en matemàtiques per poder estudiar i entendre les seves propietats matemàtiques, per tant, en aquest treball no analitzaré gens a fons la successió matemàticament. El nombre d'or és una xifra desconeguda per la majoria de la gent. Jo mateix no en sabia res abans de fer aquest treball. Les matemàtiques les trobem a molts de llocs, i estan presents a tants llocs que ens en fariem creus. En aquest treball no pretenc analitzar a fons ni la successió de Fibonacci ni el nombre d'or, ni en el camp matemàtic ni en altres camps, només pretenc ensenyar que les matemàtiques són presents a molts llocs, que molts elements estan relacionats amb termes matemàtics, especialment nombres

irracionals o successions tant riques com la de Fibonacci. Penso que és interessant estudiar aquest tema centrant-te en algun element en concret, en el meu cas ho he fet amb la successió de Fibonacci i el nombre d'or.

2. FIBONACCI

Leonardo de Pisa, conegut pel sobrenom de Fibonacci, va ser un matemàtic italià de l'edat mitjana. Va néixer l'any 1170 a Pisa i es creu que va morir l'any 1250, no se sap exactament si va ser aquest any, també a Pisa. Era fill de Guilielmo Bonacci, d'aquí el seu sobrenom Fibonacci (que vol dir fill de Bonacci en Italià), i de Alessandra, que va morir



Leonardo de Pisa (Fibonacci)

quan Fibonacci tenia només nou anys. El seu pare dirigia un establiment comercial. De jove Fibonacci ja va començar a formar-se com a mercader al costat del seu pare, mentre, simultàniament, aprenia matemàtiques, el seu pare li va ensenyar aritmètica i va fer estades en diferents països africans, en els quals va aprendre el sistema de numeració aràbic. Va ser el seu pare qui va impulsar-lo a que es decantés a estudiar matemàtiques en lloc d'esdevenir comerciant. Fibonacci va acabar dominant els sistemes de numeració aràbics a la perfecció, sistemes inexistents, encara, en Europa.

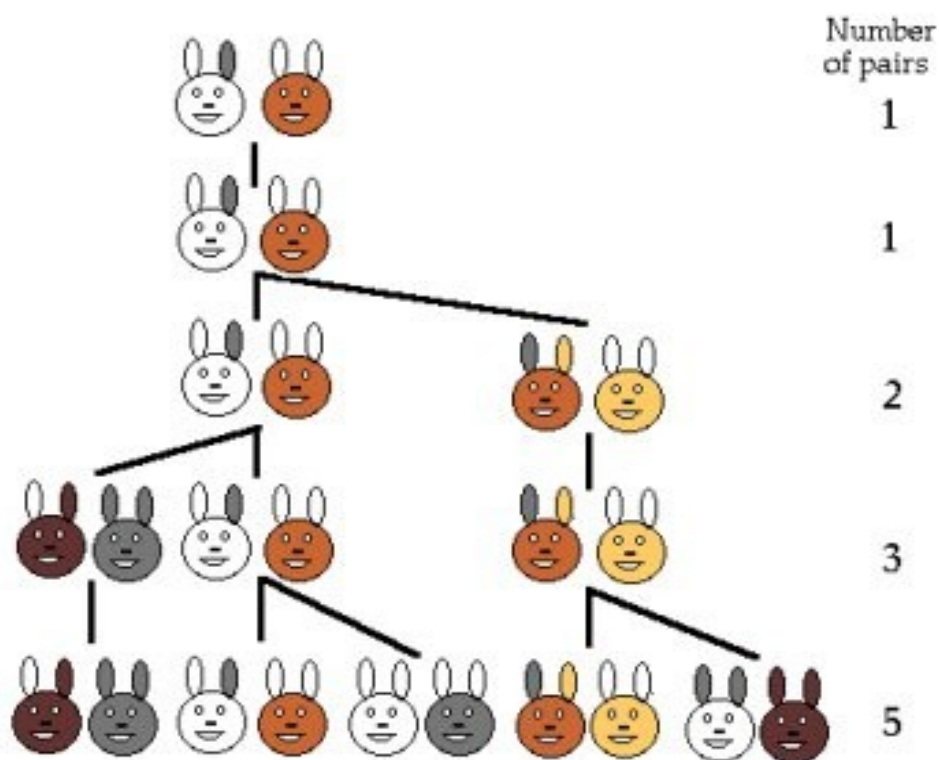
Vet aquí la primera gran fita de Leonardo de Pisa. Ell creia, i ho va demostrar en un dels seus llibres (que era un manuscrit, perquè encara no existia la impremta), que el sistema de numeració aràbic era més simple i superior al sistema romà, el que es feia servir a Europa, i volia escampar-lo per Europa. Va començar per Itàlia i va acabar "imposant-lo" a tot Occident. Al començament els comerciants no acceptaven aquest canvi, però més tard, degut al gran treball matemàtic de Fibonacci "*Liber Abaci*" (publicat l'any 1202), que donava a conèixer la numeració aràbiga (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 0) i demostrava que és molt més pràctic i molt més simple fer servir aquesta numeració. Aquest llibre va ser molt ben rebut a Europa i molts intel·lectuals europeus el van llegir. Gràcies a aquest llibre es

va produir un gran canvi, positiu, en la mentalitat europea. Aquesta va ser la introducció dels nombres que fem servir actualment a Europa. Fibonacci va escriure molts altres llibres, però degut a que eren manuscrits, i les còpies també s'havien de fer a mà, se n'han perdut molts al llarg del temps i només es conserven còpies de: "Practica geometriae", escrit l'any 1220; "Flos", escrit l'any 1225 i "Liber quadratorum", escrit l'any 1227.

Però segurament el que ha fet més famós a Fibonacci és la *successió de Fibonacci*.

3. SUCCESSIÓ DE FIBONACCI

En el llibre "*Liber Abaci*" Leonardo va plantejar i resoldre un problema: Una parella de conills triga un mes a arribar a l'edat fèrtil, a partir d'aquest moment cada mes engendra una parella de conills, que al seu torn, després de ser fèrtils també engendraran cada mes una parella de conills. Quants conills hi haurà al cap d'un determinat nombre de mesos?



Solució: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...) - Successió de Fibonacci

De fet, però, aquesta successió ja la coneixien els hindis molt abans que ho fes Fibonacci, des del s. VI, però ell va ser el que la va introduir a occident.

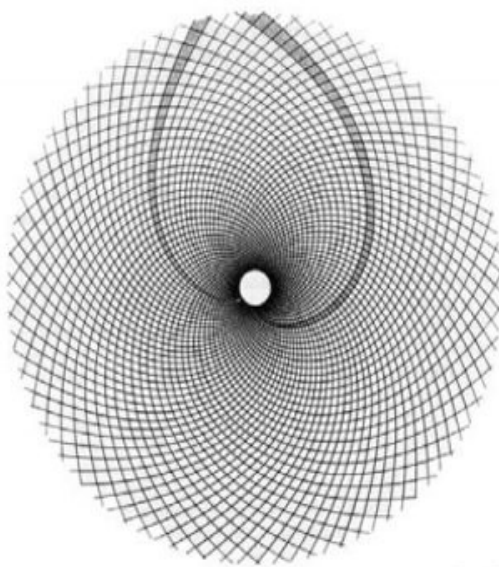
Propietats de la successió

- Cada terme és la suma dels dos anteriors (a partir del tercer).
- És una successió infinita.
- Un de cada tres números és parell, un de cada quatre és múltiple de tres, un de cada cinc és múltiple de cinc, etc.
- La suma de deu nombres seguits de la successió és igual al setè número d'aquesta sèrie multiplicat per onze. Ex. $1+1+2+3+5+8+13+21+34+55 = 143 = 13 \times 11$
- Però la característica més interessant és que el quocient entre cada nombre i l'anterior a aquest es va acostant cada vegada més al nombre d'or (1,618039...)

3.1. LA SUCCESSION DE FIBONACCI A LA NATURA

Sorprenentment en molts elements de la natura hi podem trobar emergits els termes d'aquesta successió.

En els gira-sols, per exemple, les llavors es distribueixen en forma d'espivals logarítmiques, corbes en forma d'espival, unes en sentit horari i les altres en sentit antihorari. Si comptem el nombre de llavors que formen un espival que va cap a un sentit i el nombre de llavors que formen l'espival que va en sentit contrari, trobarem que són termes de la successió de Fibonacci consecutius.



En l'exemple: 55 llavors en sentit antihorari i 89 en sentit horari.

La successió també apareix en l'arbre genealògic dels mascles d'un rusc d'abelles, un abellot (1), el mascle de l'abella, no té pare, però sí que té una mare (1, 1), dos avis, que són els pares de la reina (1, 1, 2), 03:00 besavis, ja que el pare de la reina no té pare (1, 1, 2, 3), cinc rebesavis (1, 1, 2, 3, 5), vuit 'rerebesavis' (1, 1, 2, 3, 5, 8) i així successivament, complint amb la successió de Fibonacci.

Fins i tot la trobem en l'estructura del cos de l'ésser humà, en la ma per exemple. Si sumem la mida de la falange distal (2) i la de la falange mitjana (3) obtindrem la mida de la falange proximal (5), i si sumem la mida de la falange mitjana (3) i la falange proximal (5), obtindrem la mida del metacarp (8). Aquest fet es compleix amb tots els dits de la ma excepte el gros, que només té dos falanges.

3.2. LA SUCCESSION DE FIBONACCI A LA MA DE L'HOMME

L'home ha fet servir aquesta successió no només matemàticament, sinó també en elements quotidians nostres.

Un piano, per exemple, està format per escales de 5 tons, tecles de color negre; per escales de 8 tons, tecles de color blanc i per escales de 13 tons, l'octava completa en semitons.



Malgrat tot, la successió de Fibonacci no és tan usual en la majoria dels elements de la nostra vida com el nombre d'or, que aquest es troba a molts més llocs i té moltes més aplicacions.

4. NOMBRE D'OR (DIVINA PROPORCIÓ)

El nombre d'or (Φ) és un nombre irracional, amb decimals infinits, com el nombre e o com el nombre π . Aquests dos solen ser més coneguts que el nombre d'or.

La primera persona en fer un estudi formal del nombre d'or va ser Euclides (s. III a.C.), un matemàtic i geomètric grec conegut com el pare de la geometria, que el va definir de la següent manera: *Es diu que una línia recta està dividida entre l'extrem i el seu proporcional quan la línia sencera és al segment major com el major és al menor*, en el seu llibre "Els elements". Va ser Euclides, també, qui va demostrar que era un nombre irracional.

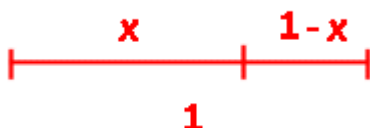
Fray Paciolo di Borgo, un monjo italià, va enunciar al 1509 la fórmula matemàtica, que la

seva aplicació era, tal com havia dit temps enrere Euclides, dóna una constant a la qual va denominar nombre d'or.

Troblem el nombre d'or fent el quocient entre un segment menor i un segment major, que és el mateix que dividir el segment major entre la suma dels dos. Aquesta proporció és l'anomenada divina proporció, o proporció àuria.

És a dir:

Tenim un segment menor (1-X), un major (X) i el total (1).



Si apliquem la divina proporció, o proporció àuria, al segment obtenim la següent equació:

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow 1-x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Si resolem l'equació de segon grau que ens ha quedat ens surt com a resultat: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

L'equació només té un resultat perquè estem parlant d'un segment, una distància, i aquesta no pot ser negativa. Si resols el resultat a la calculadora et surt l'irracional Φ , és a dir, el nombre d'or 1,618039...

La proporció d'or, és una raó que des dels seus orígens ha fascinat a totes les cultures. A partir del renaixement es va convertir en la proporció més utilitzada per arquitectes, pintors, escultors i dissenyadors, conscient o inconscientment. De fet, podríem dir que el món que ens envolta és un món proporcionat pel nombre d'or, i ho podem observar en molts elements. El més curiós és que per a l'ull de l'home, els elements que compleixen aquesta proporció són els més bells.

4.1. EL NOMBRE D'OR A LA NATURA

En molts elements de la natura, i igual que la successió de Fibonacci, hi podem trobar emergida aquesta proporció. Com que el nombre d'or està relacionat amb la successió de

Fibonacci, hi ha molts elements en els que els pots trobar tots dos, com ara als espirals de les llavors dels gira-sols o les espirals que fan les pinyes. Però hi ha casos que no.

En un rusc d'abelles la relació entre el nombre de mascles i de femelles és una divina proporció.

També trobem aquesta proporció al cos humà. En els braços, per exemple, des de la punta de la mà fins al colze seria el segment X, i des del colze fins a l'espatlla el segment 1-X.

El mateix passa des de la punta dels peus fins al melic i des del melic fins al cap.

4.2. EL NOMBRE D'OR A LA MA HUMANA

Des de fa segles que es coneix el nombre d'or, però no fins al renaixement els artistes no van començar a fer servir aquesta proporció en moltes de les seves obres d'arts, per tal d'adquirir pràcticament l'excel·lència, ja que el nombre d'or s'associa a la bellesa.

El primer va ser Luca Pacioli, que va estudiar el nombre i va aplicar-lo a l'arquitectura. Gràcies a ell el nombre d'or va començar a tenir gran acceptació entre els artistes del renaixement.

Un gran exemple és el de Leonardo Da Vinci, que en moltes de les seves obres, com ara el Vitruvi s'hi troba aquesta proporció.

Hi ha moltes obres d'art en les que es pot trobar aquesta proporció, però és possible que moltes vegades l'artista l'hagi aplicat inconscientment.

5. LES MATEMÀTIQUES I LA MÚSICA

Els músics utilitzen freqüentment les matemàtiques per a comprendre la música. El so, en els seus aspectes musicals mostra una gran gamma de propietats numèriques. De fet, la naturalesa és sorprenentment matemàtica.

Ja els antics xinesos, egipcis i mesopotamis van estudiar els principis matemàtics del so, estudis que no esmentaré perquè si no ets un entès en matemàtiques i música no pots entendre. Els pitagòrics de l'antiga Grècia van ser els primers en demostrar la relació

entre les escales musicals i proporcions numèriques. Hindús i xinesos ja fa temps que van voler mostrar que les lleis matemàtiques estaven plenament relacionades amb l'harmonia i els ritmes, i també van dir que aquesta relació era imprescindible per al benestar de l'ésser humà. Els antics grecs consideraven els números baixos (1, 2, 3 i 4) la font de tota perfecció.

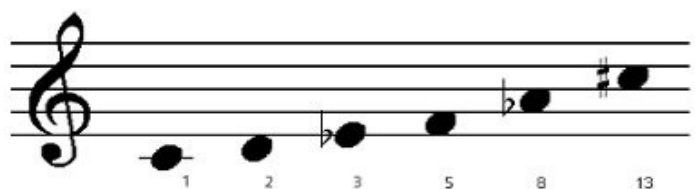
Les matemàtiques són una de les bases de la música, les trobem presents en diverses àrees d'aquesta, ja sigui en afinacions, disposició de notes, acords i harmonies, ritme, temps o nomenclatura.

6. LA SUCCESSIÓ DE FIBONACCI EN LA MÚSICA

La melodia de totes les cançons es basa en un conjunt de notes associades a un patró. Com és pot suposar hi ha moltes maneres de combinar aquestes notes, però hi ha algunes successions tan bones i útils que han influenciat en moltes composicions diferents, és a dir, que en moltes cançons la melodia està basada en la mateixa successió, el mateix patró, però les notes estan en un ordre diferent. La successió de Fibonacci és la més freqüent en les composicions musicals, ja sigui música clàssica, música moderna,...

6.1. ANÀLISI D'UNA PEÇA MUSICAL

Béla Bartók (1881 - 1945) és l'exemple més clar de compositor que ha fet servir la successió de Fibonacci en la construcció del patró de les melodies de les seves cançons. Era tan usual la successió en les composicions de Bartók que va crear una nova escala musical basant-se només en la successió de Fibonacci, que la va anomenar escala Fibonacci.



Escala Fibonacci

En l'obra nomenada *Música per a cordes, percussió i celesta* Bartók va dividir els 89 compassos en seccions de 55 i 34. Aquestes seccions les va subdividir seguint els números de la successió de Fibonacci: la

primera en 34 i 21 compassos, i la segona en 13 i 21. També en el tercer moviment de la mateixa obra una part comença amb una progressió rítmica que fa un xilòfon, aquest toca el mateix fa en grups de 1, 1, 2, 3, 5, 8, 5, 3, 2, 1 i 1.

En una altra de les seves obres, *Quartet per a cordes n° 4*, Bartók, va fer que durés un total de 2.584 pulsacions, el divuitè número de la successió de Fibonacci.

7. EL NOMBRE D'OR EN LA MÚSICA

Podem trobar tant en diverses de les sonates per a piano de Mozart, com en diverses composicions de Bartók, Massiaen o Stockhausen la proporció àuria entre el desenvolupament del tema i la seva introducció.

Però no només han sigut els autors de fa temps els que feien servir aquest nombre en les seves composicions, a l'actualitat trobem grups que encara apliquen aquest nombre als seus temes.

El grup de rock progressiu nord-americà Tool, en el seu disc *Lateralus* (2001) va fer múltiples referències al nombre d'or i a la successió de Fibonacci, sobretot en la cançó que dona nom al disc, *Lateralus*. Els versos d'aquesta cançó estan cantats de manera que el nombre de síl·labes pronunciades en cada un van composant la successió. A més la veu entra al minut 1:37, que passat al sistema decimal coincideix molt aproximadament amb el nombre d'or.

En l'obra "Boig per tu" de Sau també hi trobem una relació amb el nombre d'or. La cançó està estructurada en 5 estrofes. En les quatre primeres, la tornada s'intercala entre la segona i la quarta. La cinquena, és la repetició de la tornada un xic simplificada. L'estructura de la cançó és aquesta repetida. Dins la primera estrofa hi distingim dues unitats, la primera que avarca els compassos 1-9, i la segona que avarca els compassos 10-17. La segona part de la primera estrofa està formada per 8 compassos, i aquests estan formats per dues frases de quatre compassos cadascun. La segona estrofa està formada per 13 compassos, formats per 4 compassos cadascuna i un compàs que enllaça l'estrofa amb la tornada i amb la tercera estrofa. Si comptem el total de compassos observem que la segona part de la segona estrofa (13 compassos) dividida per la segona part de la primera estrofa (8 compassos) donen aproximadament el nombre d'or. A més, són dos nombres de la successió de Fibonacci.

Val a dir que, com a moltes obres musicals, quan van compondre la cançó no van fer

aquesta estructura intencionadament.

7.1. ANÀLISI DE L'ESTRUCTURA D'UN VIOLÍ

Si podem analitzar matemàticament la música teòrica i pràctica, i podem analitzar l'arquitectura matemàticament, també podem analitzar l'estructura d'un instrument, ja que les proporcions harmòniques són presents en les obres arquitectòniques i musicals, i, per tant, per una lògica conseqüència també ho estan en la forma dels instruments musicals. A més, es fa servir el mateix criteri per analitzar una escultura que un instrument.

Finalment, la mida i la forma dels instruments es corresponen amb els valors del nombre d'or regulats per l'antropometria, ciència que estudia estructures i determina les seves proporcions mútues, ja que compleixen els objectius d'utilitat, eficiència, facilitat d'ús i valor estètic. A més, els instruments tenen l'addicional que serveixen per transmetre bellesa.

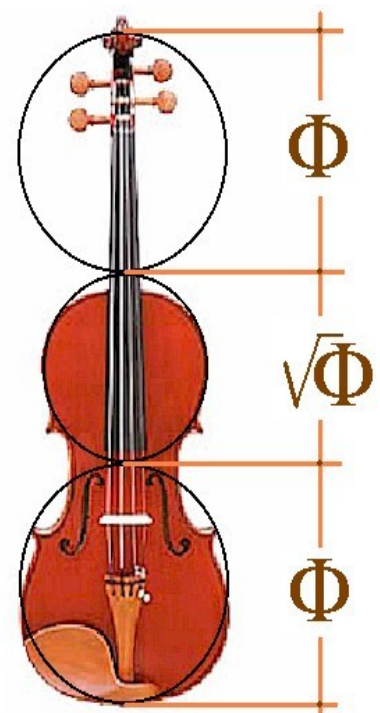
D'entre tots els instruments musicals, els de corda són els més bells, matemàticament parlant, ja que la seva configuració geomètrica permet observar clarament que l'ús de disseny que s'ha fet servir, ha estat regit per el nombre d'or. Tampoc se sap del cert si aquest sistema de fabricació artesana d'instruments de corda (lutheria), fa servir intencionadament o no la divina proporció.

Φ , $1/\Phi$, $\sqrt{\Phi}$, Φ^2 , $\Phi^{-.5}$ es considera que tot element que compleixi alguna d'aquestes relacions en la seva estructura de manera proporcional té a veure amb el



nombre d'or, és a dir, que si una estructura compleix alguna d'aquestes característiques, estudiades i definides per l'antropometria, conté el nombre d'or en la seva fabricació.

Un clar exemple és el violí, tot ell és com un conjunt de segments units, que compleixen la successió de Fibonacci. També hi ha elements com els cargols, les "esses" laterals o les corbes de la seva estructura que si fossin



només un pèl més grans, o estiguessin una mica desplaçades una mica amunt o avall, faria que la bellesa del violí i la seva relació amb el nombre d'or disminuïssin molt:

8. COMPOSICIÓ D'UNA PEÇA MUSICAL A TRAVÉS DE LA SUCCESSIÓ DE FIBONACCI

Una de les maneres més fàcils de compondre una peça musical que tingui una estructura en relació amb la successió és la següent. La idea és aplicar canvis als números de la sèrie (1,1,2,3,5,8,13,...) ja siguin segons, minuts, compassos, temps o qualsevol patró que usem. Aquests canvis poden ser qualsevol element musical, contratemps, tocar els plats, canvis de ritme, noves seccions, números de repeticions, etc. El més important és que el canvi es noti.

També una altra manera podria ser, per exemple, utilitzar les notes de l'escala seguint aquest patró, per compondre una melodia que per l'oïda humana sigui més bella.

Pot semblar increïble, però és molt cert que tant la música, com qualsevol cosa que la seva estructura estigui relacionada amb la successió de Fibonacci és més bella per a l'home.

9. ENQUESTES

NÚMERO D'ENQUESTATS: 70

NOIES: 36 (d'entre 13 i 16 anys)

NOIS: 34 (d'entre 13 i 16 anys)

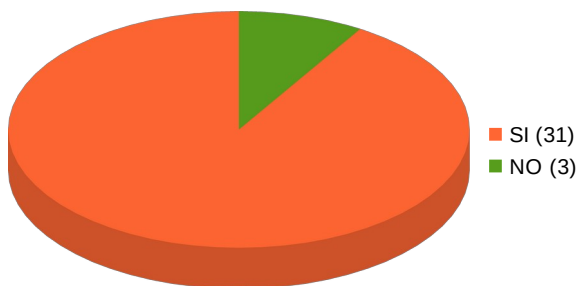
LA SUCESSIÓ DE FIBONACCI EN LA MÚSICA

JOAN PARÉS I SOLER

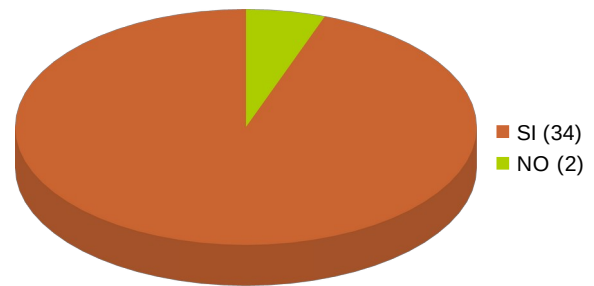
4t ESO C

1- T'agrada la música?

NOIS:



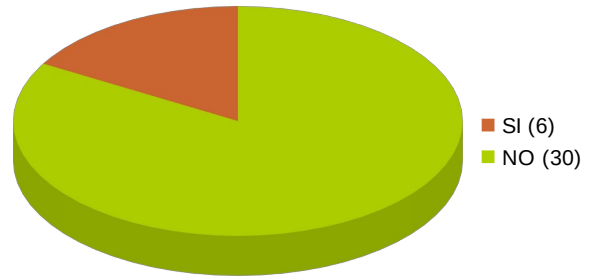
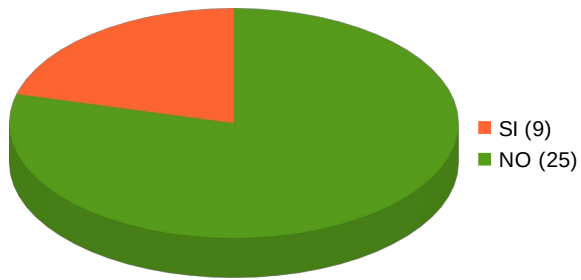
NOIES:



2- Vas a classes de música?

NOIS:

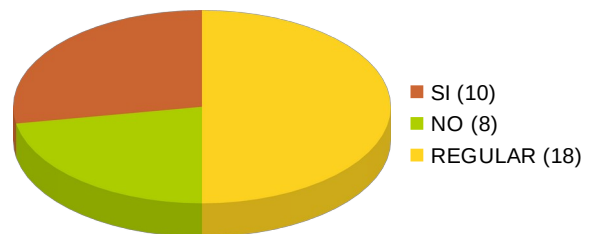
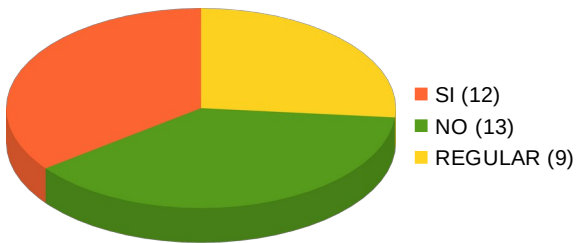
NOIES:



3- Se't dona bé?

NOIS:

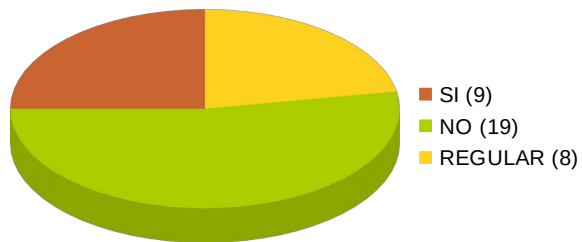
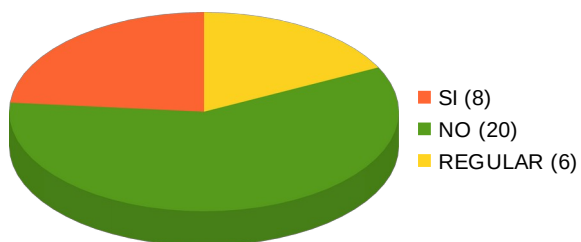
NOIES:



4- T'agraden les matemàtiques?

NOIS:

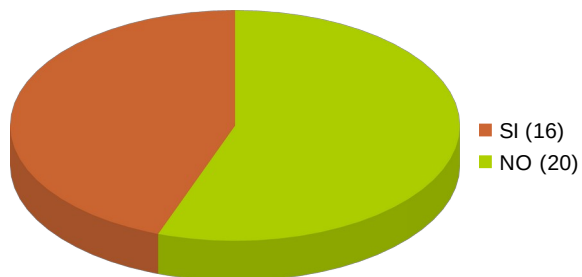
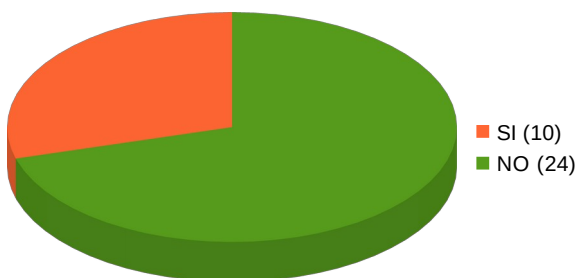
NOIES:



5- Vas a classes particulars?

NOIS:

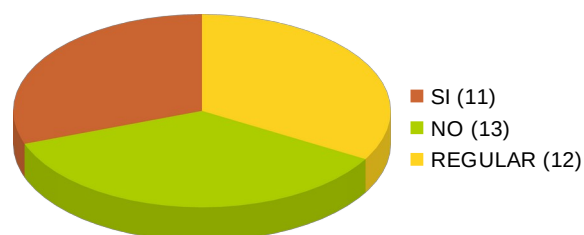
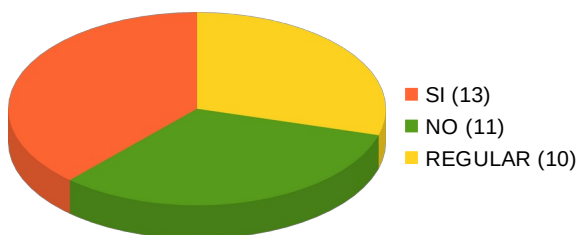
NOIES:



6- Se't donen bé?

NOIS:

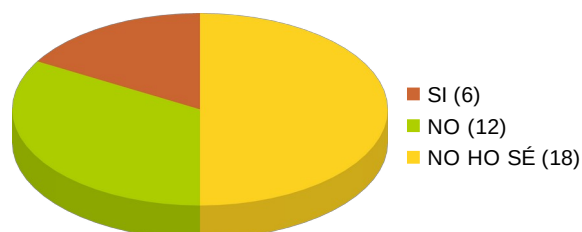
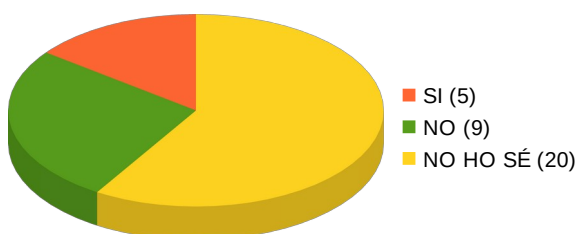
NOIES:



7- Creus que poden tenir alguna relació la música i les matemàtiques?

NOIS:

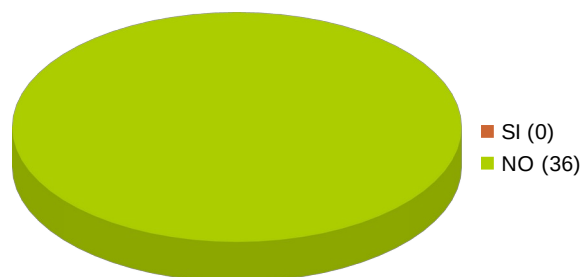
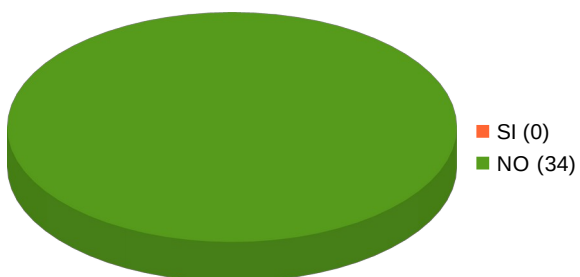
NOIES:



8- Coneixes la successió de Fibonacci?

NOIS:

NOIES:



9.1. OBSERVACIONS

- A la segona pregunta demanava que em diguessin, si van a classes de música, a on hi van, però com que la majoria que han respost “sí” no han posat a on, he suprimit aquesta part.

- A la cinquena pregunta demanava que em diguessin, si van a classes particulars de matemàtiques, a on hi van, però com que la majoria que han respost “sí” no han posat a on, he suprimit aquesta part.

- A la sisena pregunta demanava que em diguessin quina nota mitjana solen treure, però com que una majoria no ho han posat, també he suprimit aquesta part.

- A la pregunta vuit, que demanava quina relació creien que poden tenir la música i les matemàtiques hi ha hagut respostes diverses, i com que el resultat no es pot expressar amb un gràfic les escric aquí:

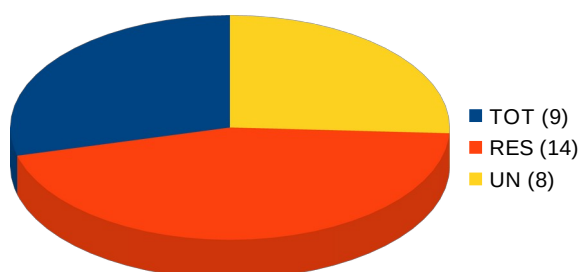
- “Fent música s’aprèn, i fent matemàtiques també”

- “Contar les notes musicals”

- “El temps de les notes” (ho han dit dos persones)

- “Els compassos” (ho han dit quatre persones)

- He fet una gràfica per veure si hi ha alguna relació entre la música i les matemàtiques, didàcticament parlant. He posat, nois i noies barrejats, els que se'ls donen bé la música i les matemàtiques, només una cosa o cap de les dues. (no he posat les que tenen regular com a resposta).



9.2. CONCLUSIONS

- La música agrada a la majoria de gent, però practicar-la no tant.
- Les matemàtiques no agraden tant com la música, i malgrat que n'hi ha que van a classes particulars no és que hi hagi una majoria d'estudiants als que se'ls hi donin bé.
- Possiblement cada vegada és més abundant anar a classes particulars.
- A ESO encara no ensenyen successions o nombres importants, com la successió de Fibonacci o el nombre d'or (exceptuant el nombre pi).
- Hi ha gent a la que només se li dóna bé la música, i hi ha gent que només les matemàtiques. Hi ha poca gent que se'ls hi doni bé tot; i el “problema” és que hi ha molta gent (en aquest cas estudiants) als quals no se'ls hi dóna bé res.

10. CONCLUSIONS

Com s'ha demostrat, les matemàtiques i la música estan relacionades en tots els sentits, teòrics, pràctics. Ara bé, no és a simple vista que es pot observar aquesta relació.

Penso que les matemàtiques podrien existir sense la música, però possiblement la música sense les matemàtiques no, ja que són la seva base.

Per la mateixa regla de tres l'home no podria viure sense la música. Penso que és un element fonamental per a l'home. Sense música no es pot gaudir tant d'una vida.

És evident que en aquesta vida de les matemàtiques no se'n pot prescindir, ja que són omnipresents, i com més estudiem les coses matemàticament, més relació trobem entre els elements existents i les matemàtiques.

Es considera que el nombre d'or és bell per a la vista humana, però què ens fa pensar que no hi ha relacions més agradables per a la nostra vista?

Segurament, la geometria creada per l'home és un intent de simplificació de la bellesa de la natura, una aproximació més o menys encertada. I és natural trobar en qualsevol objecte estètic unes proporcions, ja que busquem resposta a tot.

Aquest treball m'ha fet veure que hi ha un munt de coses, que no ens podem ni imaginar, que estan relacionades entre si. És bo saber que les matemàtiques no només tenen una aplicació, la teòrica. I també és bo saber que tot un conjunt d'elements, arts,... estan influenciades per les matemàtiques.

Música i matemàtiques estan dins el mateix grup, però mantenint distàncies, ja que si les relacionem massa, les matemàtiques adquireixen més importància de la que tenen, que ja és molta, i la música perd la seva màgia.

11. BIBLIOGRAFIA

PÀGINES WEB:

<http://cerezo.pntic.mec.es/~agarc170/paginas/fibonacci.htm>

http://es.wikipedia.org/wiki/Bart%C3%B3k#La_proporci.C3.B3n_.C3.A1urea

http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%BAsica_y_matem%C3%A1ticas

http://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n_de_Fibonacci

<http://usuarios.multimania.es/GrupoBabilonia/Biografias/Fibonacci.htm>

<http://www.astroseti.org/articulo/3608/>

<http://www.edu365.cat/batxillerat/comfer/recerca/nombredor.pdf>

http://www.figueraspacheco.com/LBOTELLA/Geom/Investigac/cris_nombre_or.htm

<http://www.recercat.net>

<http://www.sabiask.com/sabiasque/ciencia/la-sucesion-de-fibonacci.html>

http://www.sectormatematica.cl/arte/divina_proporcion.pdf

<http://www.sectormatematica.cl/musica.html>

LLIBRES:

Arbonés, Javier; Milrud, Pablo. *La armonía es numérica*. RBA Coleccionables, S.A. 2010

Carbonell, Jordi. Gran enciclopèdia catalana. Enciclopèdia Catalana S.A.. 1969