



**Treball
de recerca**

L'infinit

Institut Pere Alsius



Roger Caro Figueras

Batxillerat 2023-2024

**Tutoritzat per:
M. Dolors Roca Casadevall**

Octubre 2023, Banyoles

“La certesa és absència d'infinit, l'infinit
és presència d'incertesa.”

-Nanamoli Bhikkhu

Agraïments:

Moltes gràcies per la col·laboració d'Albert Casals del programa XEC3, per a crear el programa informàtic, així com a Esther Barrabés de la UdG i a Àngels Picart, per a posar de la seva part en l'àmbit matemàtic. També cal agrair a tots els professors que m'han ajudat, però sobretot gràcies a la tutora Dolors Roca. Sense l'ajuda de tots, aquest treball no hauria estat possible.

Abstract

El infinito es un concepto que se escapa de la comprensión, ya que su complejidad significa un estorbo a la hora de comprenderlo. Sin embargo, en este trabajo, se ha intentado despedazar este concepto en tres de sus principales ramas; las matemáticas, la física y la filosofía, además de buscar una parte experimental basada en el infinito. En la parte matemática, se ha explicado las teorías, paradojas y ejemplos más importantes para poder entender la magnitud del infinito y su uso como herramienta de cálculo. En la parte física se han mencionado los fenómenos astronómicos que se relacionan con el concepto, además que se ha intentado llevar al campo de la cuántica. Referente a la parte filosófica se han mencionado a los principales científicos que hablaron del infinito, y se ha especificado qué pensaban sobre él.

Para plasmar el concepto de infinito en algo tangible, se ha logrado recrear fractales en "GeoGebra", la mejor forma de visualizar el infinito. Además, se ha buscado la dimensión fractal del lago de Banyoles mediante diferentes técnicas, y se ha demostrado que el lago sí tiene dimensión fractal.

Infinity is a concept that escapes comprehension, as its complexity supposes an obstacle to understanding it. However, in this work the concept has been divided into three of its main branches: mathematics, physics, and philosophy, in addition to searching an experimental aspect of infinity. In the mathematical part, theories, paradoxes, and important examples have been explained to understand the magnitude of the infinity and its use as a mathematical tool. In the physical part, astronomical phenomena related to the concept have been mentioned, the infinity has been brought into the realm of quantum physics. For the philosophical part, the major scientists who discussed infinity have been mentioned, along with their specific views on it.

To represent infinity in something tangible, fractals have been successfully recreated in "GeoGebra," the best way to visualize infinity. Furthermore, the fractal dimension of the lake of Banyoles has been explored using different techniques, demonstrating that the lake indeed has a fractal dimension.

ÍNDEX

1. INTRODUCCIÓ.....	2
1.1 Justificació.....	2
1.2 Objectius.....	3
1.3 Metodologia.....	3
2. RECERCA BIBLIOGRÀFICA.....	4
2.1. Introducció a l'infinit (Tres moments).....	4
2.1.1. Antiga Grècia.....	4
2.1.2. La Grafia de l'infinit.....	6
2.1.3. Món Modern.....	7
2.2. L'infinit matemàtic.....	9
2.2.1. Propietats matemàtiques.....	10
2.2.2 Tipus d'infinit.....	15
2.2.3 Teoria dels conjunts.....	16
2.2.4. Topologia.....	22
2.2.5. Fractals.....	24
2.3. L'infinit a la física.....	29
2.3.1. Introducció.....	29
2.3.2. Astronomia.....	30
2.3.2.1. L'infinit en la teoria de la Relativitat general.....	31
2.3.3. L'infinit en la Quàntica.....	33
2.4. L'infinit a la Filosofia.....	36
2.5. Projeccions futures de l'infinit.....	47
3. MARC PRÀCTIC.....	48
3.1. Fractals amb GeoGebra.....	48
3.1.1. Creació pas per pas.....	49
3.1.2. Fractal de Mandelbrot.....	57
3.1.3. Fractal Cosinus.....	58
3.1.4. Fractal Sinus.....	59
3.1.5. Fractals de creació pròpia.....	59
3.2. Dimensió fractal de l'estany de Banyoles.....	61
3.2.1. Dimensió fractal de l'estany mitjançant Google Earth.....	61
3.2.2. Càlcul de la dimensió fractal de l'estany mitjançant un programa informàtic... 65	
4. DISCUSSIÓ.....	75
5. CONCLUSIÓ.....	76
6. BIBLIOGRAFIA.....	77
7. ÍNDEX D'IL·LUSTRACIONS.....	79
8. ANNEXOS.....	82

1. INTRODUCCIÓ

1.1 Justificació

L'infinit és un terme que durant els anys ha cridat l'atenció de molta gent, jo en soc un d'ells. És un concepte inimaginable, però amb unes propietats fascinants. El simple fet que no es pugui acabar mai priva de la seva comprensió i anàlisi, cosa que m'ha impulsat a fer un treball sobre l'infinit. A més, cal remarcar que sempre m'he decantat per l'àmbit científic, sobretot per les branques de les matemàtiques i la física, i és per aquí on vull orientar el meu treball. A part d'aquest tema també vaig tenir altres idees que tenien més a veure amb la biologia. Hauria estat més senzill perquè hagués pogut fer una part pràctica més assequible, més experimental, però com que a mi m'apassionen els reptes, finalment m'he decantat per un tema més abstracte, amb una part pràctica més conceptual que material. Una altra raó per la qual he escollit aquest tema de vessant matemàtic és perquè quan finalitzi batxillerat m'agradaria cursar el doble grau de física i matemàtiques, a més, m'agradaria fer el treball de final de grau basat en l'infinit. Així que per a mi aquest treball és molt important, i serà un gran començament per a la meva investigació sobre aquest concepte.

També falta dir que la idea de treballar l'infinit va sorgir d'un documental que vaig veure a "Netflix" anomenat "*A trip to infinity*", on expliquen molt bé aquest concepte i es fan entrevistes a grans experts en la matèria que resolen certs dubtes, però sempre acabant amb la conclusió que l'infinit és quasi impossible d'entendre i definir, sobretot des del punt de vista físic. Un altre punt fort és que es tracta l'infinit d'una manera que atrau l'atenció, i és molt interessant.

En general és un tema que em motiva molt, i crec que serà molt amè treballar sobre l'infinit, ja que com he mencionat atrau molt la meva atenció, i a més com que és un tema tan complex i poc treballat a l'institut, tinc la llibertat de tractar-lo d'una manera més pròpia, però sempre des d'un punt de vista objectiu, i basant-me en estudis professionals de matemàtics o físics entesos en el tema pel fet que les meves capacitats i coneixements com a estudiant de batxillerat em limiten molt.

1.2 Objectius

- Explorar el concepte d'infinit en les seves branques principals, les quals són les matemàtiques, la física i la filosofia.
- Trobar una manera tangible de representar l'infinit, és a dir representar l'infinit com a una fractal i intentar crear-ne algunes amb el programari GeoGebra.
- Estudiar la dimensió fractal de l'estany de Banyoles (que se situa en part al municipi de Porqueres) mitjançant càlculs, i relacionar-ho amb estudis previs.

1.3 Metodologia

Per a dur a terme el treball de recerca sobre l'infinit, primerament, s'ha hagut de buscar molta informació sobre el concepte en llibres, webs, articles i més, per a tenir un coneixement fonamentat i fiable. Per començar s'ha fet una petita introducció a l'infinit per posar-lo en context històric, i obrir pas a explicar-lo. Seguidament, s'ha enfocat l'infinit en les seves tres branques principals, i s'ha explicat les seves característiques en cada una d'elles. La primera branca és la matemàtica, on s'ha explicat totes les propietats matemàtiques de l'infinit, i s'ha mencionat teories que es relacionen amb el concepte. En segon lloc, s'ha parlat de l'infinit com a concepte físic. En aquest cas s'ha parlat de l'infinit en la teoria relativista i en la branca de la quàntica. En tercer lloc, s'ha encarat l'infinit en una perspectiva filosòfica on s'ha mencionat els filòsofs més rellevants que han parlat sobre l'infinit i s'ha explicat què van aportar. Per acabar, s'ha explicat quins són els objectius futurs amb relació a la investigació de l'infinit, i quins problemes queden per resoldre.

Pel que fa a la part pràctica, s'ha buscat una manera de visualitzar l'infinit utilitzant les fractals, a través del programa "GeoGebra". En segon lloc, s'ha buscat la dimensió fractal de l'Estany de Banyoles mitjançant dues tècniques diferents i s'ha comparat quina de les dues porta a resultats més precisos. També s'ha comparat les tècniques emparades amb la d'un treball previ que de la mateixa manera buscava la dimensió fractal de l'estany. Finalment se n'han extret unes conclusions.

2. RECERCA BIBLIOGRÀFICA

Tothom ha sentit a parlar alguna vegada sobre un misteriós concepte lligat amb la idea que no s'acaba mai. L'infinit sempre ha estat un objectiu per a molts científics i la seva comprensió ha variat molt al llarg de tota la història. Però com tot l'infinit té un origen.

2.1. Introducció a l'infinit (Tres moments)

Històricament, el concepte d'infinit matemàtic estava estretament vinculat a l'aspecte filosòfic i religiós. La religió exercia una gran influència sobre els intel·lectuals, i la matemàtica sempre ha estat estretament associada a la filosofia. Per aquesta raó, és difícil determinar si la noció d'infinit va sorgir en el context de les matemàtiques o de la filosofia.

2.1.1. Antiga Grècia

Les primeres qüestions sobre l'infinit van sorgir a l'antiga Grècia, quan els pensadors es plantejaven si l'espai i el temps eren finits o infinits, juntament amb el dubte de si la matèria es podia dividir infinites vegades o no. El primer filòsof a parlar sobre l'infinit és Anaximandre, s. VI aC, qui proposava que la substància que forma totes les coses és l'*àpeiron*, una substància indefinida i il·limitada des de la qual derivaven totes les coses que existeixen. Ell definia l'infinit com al contrari de límit (“peras” en grec significa “límit”, “àpeiron” —no “peras”— significa il·limitat). En aquell moment, i amb una visió més matemàtica, els pitagòrics deien que només els nombres naturals eren l'essència de tot, i només aquests podien ser infinits, cosa que es va contradir quan els mateixos pitagòrics van descobrir els nombres irracionals, uns nombres amb una quantitat infinita de decimals.

L'infinit va causar molts problemes, com paradoxes i contradiccions, per això es va crear un sentiment entre el món grec nomenat “fòbia a l'infinit”. Una d'elles era la paradoxa d'Aquil·les i la tortuga suggerida per Zenó d'Elea, s. V aC. Aquil·les, un heroi pels homes i el més fort va desafiar una tortuga molt lenta a una carrera. Com que Aquil·les era bondadós li va deixar un avantatge d'una mesura d'espai. Quan va començar la carrera Aquil·les va avançar aquesta mesura amb un minut, però la tortuga va avançar una desena part d'aquesta mesura. Després quan Aquil·les va avançar aquesta desena part de mesura, la

tortuga havia avançat la desena part de la desena part, i així successivament, de manera que la tortuga anava portant-li avantatge a Aquil·les per molt petita que fos.

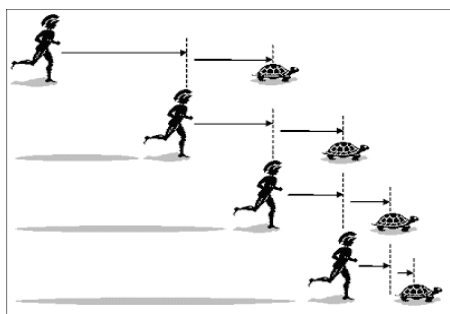


Figura 1: Cursa d'Aquil·les i la tortuga.

Naturalment, actualment ja s'ha donat resposta a aquesta paradoxa, i és que Aquil·les acaba atrapant la tortuga. Només calculant la suma de tot l'espai que recorre abans d'atrapar-la, veiem que no és un espai infinit, per tant, Aquil·les acabarà avançant la tortuga. Per calcular les mesures d'espai necessàries per a atrapar la tortuga s'ha de fer de la següent manera.

$$A = (1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} \dots \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^n} + \dots);$$

$$10 \cdot A = 10 \cdot (1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} \dots \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^n} + \dots);$$

$$10 \cdot A = (10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} \dots \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^n} + \dots);$$

$$10 \cdot A = 10 + (1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} \dots \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^n} + \dots);$$

$$10 \cdot A = 10 + A;$$

$$10 \cdot A - A = 10;$$

$$9 \cdot A = 10;$$

$$A = \frac{10}{9} = 1.\overline{1} \text{ mesures d'espai necessàries per atrapar a la tortuga}$$

Per calcular-ho s'ha hagut de multiplicar per deu els dos costats de la igualtat, per tal que, gràcies a la propietat distributiva, es puguin multiplicar tots els termes de la suma infinita. D'aquesta manera es pot observar que dona com a resultat $(10+A)$, ja que, dins la sèrie, el que continua després del deu és exactament igual a la sèrie "A". Finalment, se substitueix la sèrie per "A", i s'aïlla la lletra, de manera que dona com a resultat $1.\overline{1}$.

Una altra manera més clara de resoldre la paradoxa és que tal com es defineix, Aquil·les avança un segment d'espai més gran que la tortuga en el mateix període de temps, per tant, la velocitat d'Aquil·les és superior a la de la tortuga, per això, Aquil·les atraparà la tortuga.

Com s'ha vist, moltes paradoxes ara es poden resoldre, però en aquells moments van causar molts problemes igual que ara n'existeixen moltes que resulten un repte. El cas és que Zenó creia que una suma de nombres infinits mai pot ser finita, cosa que es va contradir dos mil anys més tard, amb la creació de les sèries infinites, explicat més endavant.

El primer filòsof a precisar clarament l'infinit va ser Aristòtil, s. III aC, distingint entre l'infinit potencial i infinit actual. Per a ell, només existeix l'infinit potencial, és a dir la possibilitat d'anar afegint elements a una sèrie indefinidament, o també per divisió; mentre que l'infinit actual, entès com una realitat o substància actualment infinita, en un sentit complet i donada tota alhora, no pot existir.

2.1.2. La Grafia de l'infinit

Durant el segle XVII John Wallis va establir el símbol actual de l'infinit (∞), com a notació matemàtica, en l'obra *Arithmetica Infinitorum*. Wallis va escollir aquest símbol de vuit col·locat horitzontalment, ja que definia una corba que podies seguir indefinidament, també el va escollir perquè no tenia cap aresta ni cap recta, sinó que és una sola línia contínua. Per a crear aquest conegut símbol Wallis es va inspirar amb el símbol grec *Oroboros*, el mític animal que és mossega la cua. Aquest animal apareix a l'antiga Grècia com a un drac i a la mitologia nòrdica se solia representar com a una serp (*Jörmungandr*) que també es menja la cua. En els dos casos aquesta imatge s'associava amb l'eternitat dels cicles que es repeteixen. També significava el cicle de la vida.

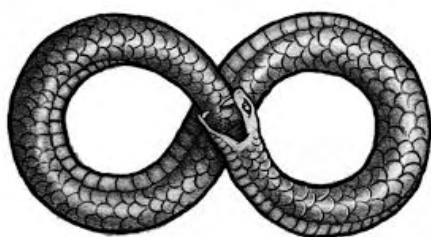


Figura 2: Serp que es mossega la cua.



Figura 3: Serp Jörmungandr.

Des d'un punt de vista geomètric el símbol d'infinit també s'anomena *lemniscata*, que significa "llaç" en grec. Rep aquest nom a causa de la similitud que té amb la corba

lemniscata que es defineix com una línia unicursal traçada a partir de dos focus que tenen característiques molt específiques.

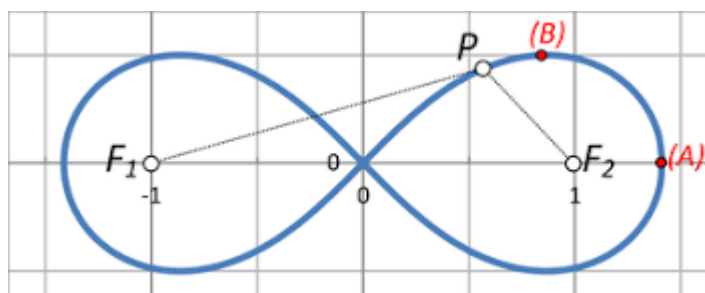


Figura 4: Funció lemniscata.

També hi ha gent que creu que aquesta forma s'extreu del recorregut que fa el Sol al cel si se l'observa a la mateixa hora durant tot l'any, cosa que defineix una forma de vuit. Aquest succés s'anomena Analema Solar.

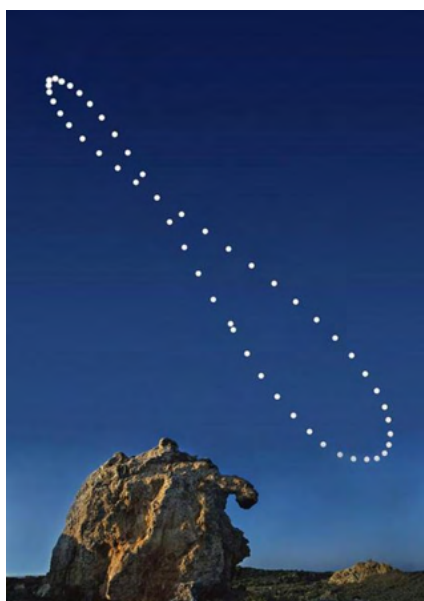


Figura 5: Analema Solar.

2.1.3. Món Modern

Passats els anys la comprensió de l'infinit no va evolucionar gaire perquè l'església controlava la cultura, sobretot a l'edat mitjana. No va ser fins al segle XVII quan es va començar a desenvolupar el càlcul infinitesimal un tipus de càlcul que estudia el canvi a la continuïtat, per a determinar àrees i volums. Un personatge important d'aquest segle va ser Galileu (1638), qui va fixar-se novament en l'infinit potencial, un concepte que empaqueta

tota la continuïtat de l'infinit, és a dir la idea general que un nombre pot augmentar indefinidament. Va considerar que els infinits són incomparables, no es pot establir que un és més gran, menor o igual que un altre infinit. A més, va suggerir una paradoxa relacionada amb això. Aquesta deia que la quantitat de nombres enters sembla major que la quantitat de quadrats perfectes, ja que si contem de l'1 al 5, hi ha 5 nombres enters, però 2 quadrats perfectes (1, 4). Però la qüestió és que en realitat sí que hi ha el mateix nombre de components, i es demostrarà més endavant.

El 1639 Gérard Desargues va introduir la idea d'infinit en la geometria, una idea ja suggerida prèviament per Cavalieri juntament amb Kepler, qui van denominar una àrea com a una suma d'infinites línies i un volum com a una suma d'infinites figures planes. A més a més, és en aquest període quan John Wallis va introduir per primera vegada el símbol d'infinit com a notació, això va suposar un canvi, ja que es va començar a sentir a parlar de l'infinit popularment. Temps més tard Newton (1676) va intentar portar l'infinit a la física, amb els increments infinitament petits, coneguts ara com a derivades i va extreure'n excel·lents resultats, és a dir, va portar una eina matemàtica a la física.

Ja al segle XIX Richard Dedekind (1831-1916) va establir les propietats i característiques dels conjunts de nombres infinits. Segons ell, els conjunts infinits tenen les propietats següents: la unió de dos conjunts és infinita sempre que almenys un dels conjunts sigui infinit. Qualsevol conjunt que contingui un conjunt infinit és també infinit. El conjunt potència d'un conjunt infinit és alhora infinit.

Finalment, el gran matemàtic Georg Cantor va crear la teoria dels conjunts, una aportació molt gran sobre l'infinit a part que va distingir la diferència entre l'infinit actual i l'infinit potencial cosa que va formalitzar la noció d'infinit matemàtic.

Altres aportacions destacades són les de: Kurt Gödel (1906-1978), un dels lògics més importants fins ara, va establir el Teorema de la incompletesa, que més endavant s'explicarà. L'aportació més recent sobre l'infinit és de Benoît Mandelbrot (1977), qui va establir la teoria de fractals.

Tot i que l'infinit ha estat molt estudiat, encara queden moltes paradoxes sense resoldre com el problema més gran sobre l'infinit, la hipòtesi del continu.

2.2. L'infinit matemàtic

Una forma clara per entendre les propietats de l'infinit és amb l'hotel infinit de Hilbert. Es tracta d'una metàfora proposada per David Hilbert l'any 1924.

Hi ha un hotel molt gran, amb infinites habitacions, i totes les habitacions estan ocupades per hostes. Un dia arriba una persona i diu que es vol allotjar a l'hotel infinit, així que la recepcionista busca una solució perquè hi càpiga una persona més quan l'hotel està totalment ple. El que fa la recepcionista és dir per megafonia a tots els clients que es moguin a una habitació més amunt, és a dir el de l'habitació 1 a la 2, el de la 2 a la 3 i així successivament. D'aquesta manera queda l'habitació 1 lliure i tots els altres clients tindran igualment una habitació per a ells. Però com és possible si ja estaven totes ocupades? Aquesta és una de les més espectaculars propietats de l'infinit, sempre es pot sumar un número més a aquest concepte.

El pròxim dia la recepcionista es troba amb un altre problema, i és que arriben infinits clients nous que busquen una habitació. El que fa la recepcionista és dir a tots els hostes que es moguin a l'habitació que sigui el doble de la seva, de manera que quedaran totes les habitacions senars lliures, i per tant infinites habitacions on es quedaran infinits hostes. Segona propietat, molt relacionada amb la primera, pots sumar infinits nombres a l'infinit, i continuarà donant infinit. Al final del dia la recepcionista ha de netejar totes les habitacions perquè els hostes estiguin còmodes. El que fa és netejar infinites habitacions amb només un minut netejant la primera habitació amb mig minut, la segona amb un quart de minut, la tercera amb un vuitè de minut, successivament donant com a resultat la següent suma.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} \dots = 1$$

Aquest és un altre exemple d'una suma infinita que dona un nombre finit, igual que el càlcul de la paradoxa de Zenó.

Òbviament, fer tot això és impossible físicament, ja que hauries d'arribar a una velocitat infinita, una cosa que ni un fotó de llum és capaç de fer, però aquesta operació matemàticament és possible.

Com s'ha vist, les sumes de termes infinits tenen un nom, i s'anomenen sèries.

Les sèries en matemàtiques són una successió de nombres infinita, i aquestes sèries que normalment segueixen un patró, si se sumen, poden donar com a resultat un nombre finit (sèries convergents), o bé poden donar un nombre infinit (sèries divergents). De sèries convergents ja se n'han mencionat dues anteriorment. Quant a les sèries divergents un exemple seria la successió de Fibonacci, ja que si se sumessin tots els termes el resultat seria infinit: (0,1,1,2,3,5,8,13...).

2.2.1. Propietats matemàtiques

Primer de tot cal dir que operar amb l'infinit no tindria sentit en un context que no és de límits, pel fet que, d'entrada, no es pot operar amb un concepte complex. L'infinit no és un nombre. En canvi, quan es parla de límits sí que es pot parlar d'un nombre que tendeix a infinit.

L'infinit matemàticament és un concepte molt complex i amb unes propietats increïbles que no concorden amb les operacions corrents que es poden fer amb nombres finits. Per exemple tenint en compte que l'infinit fos un nombre finit, es podria fer una operació molt simple, una suma ($\infty + 1$). Però com és possible afegir un nombre a un concepte que és més gran del que et pots imaginar? Donaria ∞ , però si després passéssim a restar l'infinit a l'infinit es podria fer aquesta operació? La resposta és no. Donaria indefinit, per tant, s'arriba a la conclusió que no es pot tractar com a un número qualsevol, tot i que a les matemàtiques s'utilitza molt, sobretot quan es parla de límits o geometria.

Existeixen certes operacions que no són possibles amb aquest nombre pel fet que és un concepte totalment indefinit i no es comporta com un número corrent. En conseqüència totes les operacions que comportin la diferència, la raó de dos infinits i algunes potències no es poden determinar resultats. No obstant això, n'hi ha que es poden resoldre. Les principals indeterminacions:

- $\infty - \infty = \text{indeterminat}$

En aquest cas la indeterminació és deguda al fet que no es pot saber quin infinit dels dos és més gran, a més, no es poden considerar iguals. Per tant, si no es pot saber si quedaria $+\infty$ o $-\infty$, és indeterminat.

- $\infty/\infty = \text{indeterminat}$

Quan es divideixen dos infinits depenent de quin grau és més gran, podrien donar resultats molt diferents. Si el numerador fos el de grau més gran, el resultat seria ∞ , però si el denominador fos el de grau més gran, el resultat seria 0. Per altra banda, si els dos graus són iguals, el resultat és una constant, per tant, és indeterminat.

- $1^\infty = \text{indeterminat}$

Se sap que el nombre 1 elevat a qualsevol nombre dona 1, però no passa el mateix quan s'eleva a l'infinit. L'infinit no es pot considerar nombre, per tant, aquesta expressió no tindria sentit, és per això que s'ha de tractar com a un límit. $\lim_{x \rightarrow \infty} 1^x$. En aquest cas el resultat no

seria 1, els resultats podrien ser molt diversos. Ja que aquesta indeterminació sol derivar de

la següent expressió, que mitjançant alguns càlculs es pot trobar una solució i que el resultat sigui un nombre qualsevol:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 \pm \frac{n}{x}\right)^x$$

Si aquesta expressió no es modifica, quan se substitueix la x per infinit el resultat queda (1^∞) , perquè qualsevol nombre dividit entre infinit dona 0, i per tant quedaria $(1+0)^x$.

- $0^\infty = \text{indeterminat}$

En aquest cas la indeterminació es deu al fet que el nombre 0, quan es parla de límit, no és realment zero, sinó un nombre molt pròxim a zero, en conseqüència no es podria saber quin en seria el resultat.

- $\infty^0 = \text{indeterminat}$

El mateix passa en aquest cas, depèn de com s'aproximi a zero el límit, i per quin costat.

Límits

Un límit d'una funció, és el concepte que descriu la tendència de la funció, a mesura que els paràmetres d'aquesta s'acosta molt a un valor. En altres paraules, descriu quin és el valor de y quan la x s'acosta infinitament a un nombre (a), però mai pren el valor de (a).

Existeixen tres tipus de límits que contenen l'infinit:

- Hi ha funcions que el valor de y s'aproxima a infinit quan el valor de x tendeix a valors cada vegada més grans, és a dir tendeix a infinit: $\left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty\right)$.

Exemple: funcions exponencials, funcions lineals, funcions polinòmiques, etc.

- En canvi, també existeixen funcions que quan el valor de x pren cada vegada valors més grans, la variable y s'aproxima a un nombre finit:

$$\left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a\right).$$

Quan les funcions compleixen aquesta expressió, es diu que tenen asíptotes horitzontals, ja que gràficament es veu com la funció tendeix a una línia horitzontal.

Exemple: funcions racionals: si el grau del denominador és superior al grau del numerador, el valor del límit és 0, per tant, hi ha una asíptota horitzontal a $y=0$, en canvi, si els dos graus són iguals, la constant és la divisió dels coeficients dels termes de grau més gran dels dos polinomis, en conseqüència hi ha una asíptota horitzontal a $y=a$.

- Finalment, hi ha funcions que quan x tendeix a un nombre (a), el valor de y s'aproxima cada vegada més a l'infinit.

$$(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty).$$

Quan les funcions compleixen aquesta expressió, es diu que tenen asímtotes verticals.

Exemple: Algunes funcions racionals on el denominador s'anul·la pel valor de (a), i funcions logarítmiques.

Hi ha diferents tipus de funcions, i n'hi ha que arriben amb més rapidesa a l'infinit que altres. Hi ha una manera matemàtica de comprovar-ho, i és mirant el límit quan x tendeix a infinit, del quocient de dues funcions: $(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)})$. Si el resultat dona infinit, vol dir que la funció

que està en el numerador és la que tendeix a infinit més ràpidament; si el resultat dona 0 vol dir que la funció que està en el denominador és la que tendeix més ràpidament, en canvi, si dona un valor qualsevol que no és ni 0 ni infinit, vol dir que les dues funcions tendeixen a infinit a la mateixa velocitat. Uns exemples serien:

- Les funcions logarítmiques creixen molt lentament cap a l'infinit comparat amb les exponencials, que creixen molt més de pressa.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty}$ En aquest cas dona indeterminació, i per a eliminar-la s'han de derivar les dues funcions per separat, i tornar a fer el límit, aquest procés s'anomena la Regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1/x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \cdot x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

Com que ha donat infinit, vol dir que la funció que està en el numerador (funció exponencial) tendeix a infinit més de pressa que la funció logarítmica.

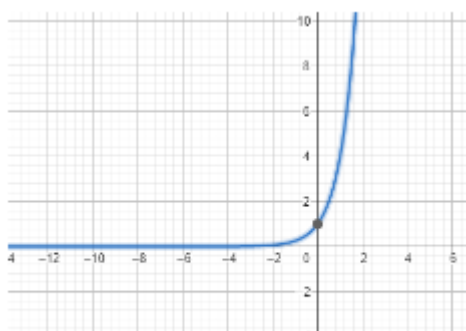


Figura 6: Funció Exponencial.

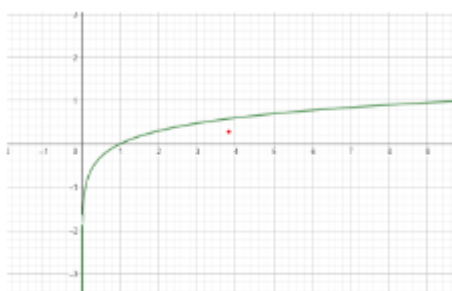


Figura 7: Funció Logarítmica.

-Comparació:

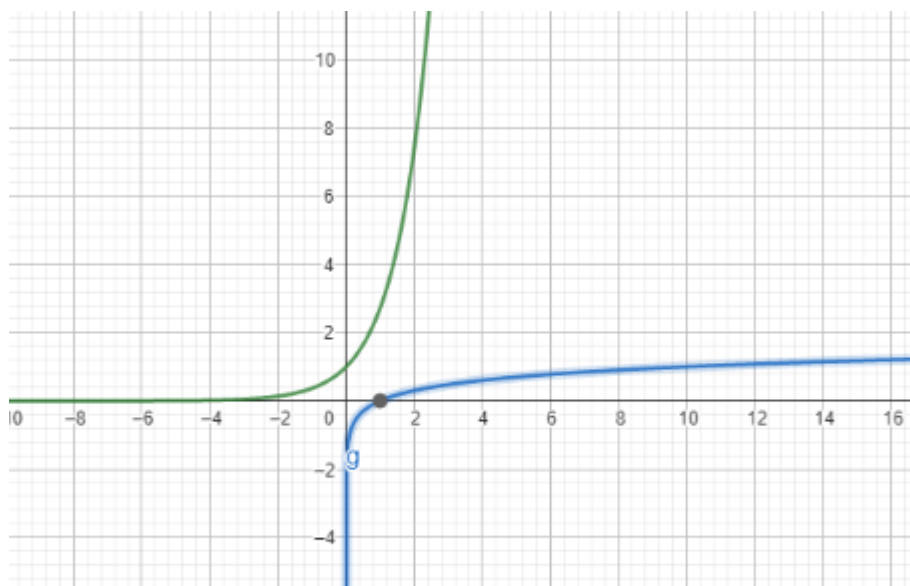


Figura 8: Funcions Exponencial i Logarítmica comparades.

- Per altra banda, si es comparen dues funcions logarítmiques de diferents bases es pot veure que totes dues tendeixen a infinit a la mateixa rapidesa.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_2 x}{\log_5 x} = \frac{\infty}{\infty}$ Novament, s'ha aplicat la regla de l'Hôpital per a evitar la indeterminació:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x \cdot 1/\ln 2}{1/x \cdot 1/\ln 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 5}{\ln 2} = \frac{\ln 5}{\ln 2}$ En ser un nombre constant, es pot afirmar que les dues

funcions arriben a infinit amb la mateixa rapidesa.

- La rapidesa de creixement de les funcions polinòmiques, depèn directament del grau del polinomi. Un polinomi de grau 10 arriba més ràpidament a l'infinit que un de grau 2:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{10} + x^2 + 3}{x^2 + 2x + 5} = \frac{\infty}{\infty}$ Per evitar la indeterminació simplement s'ha de mirar el grau, i si el de

grau més gran està com a numerador, el límit tendirà a infinit, si el grau més gran està al denominador el límit tendirà a zero.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{10} + x^2 + 3}{x^2 + 2x + 5} \rightarrow \frac{\text{Grau } 10}{\text{Grau } 2} \rightarrow \infty$

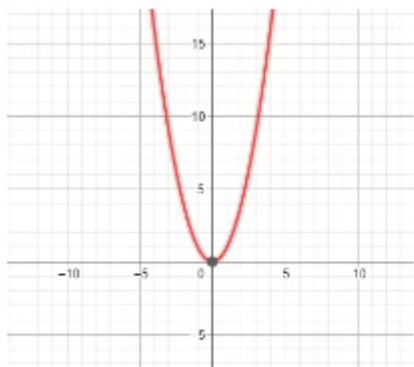


Figura 9: Funció Polinòmica Grau 2.



Figura 10: Funció Polinòmica Grau 10.

-Comparació:

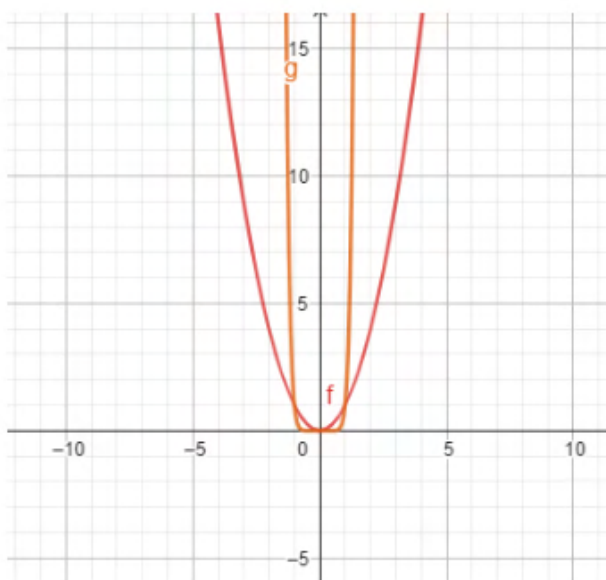


Figura 11: Funcions Polinòmiques de grau 2 i 10 comparades.

- També hi ha les funcions factorials, que creixen molt més ràpidament que qualsevol exponencial. ($f(x)=x!$)

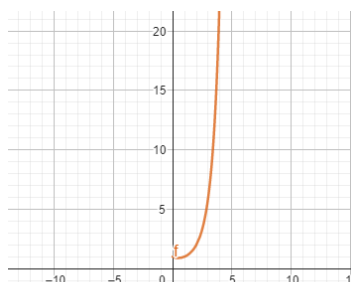


Figura 12: Funció factorial.

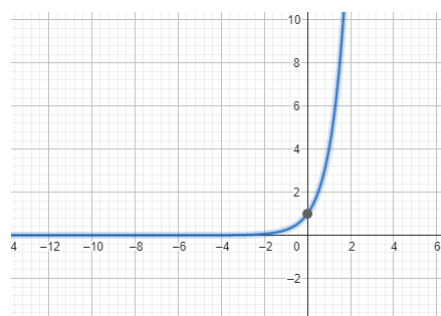


Figura 13: Funció exponencial

-Comparació:



Figura 14: Funcions exponencial i factorial comparades.

2.2.2 Tipus d'infinit

Dins el concepte d'infinit es poden distingir dues maneres diferents de conèixer-lo denominats infinit potencial i infinit actual.

L'infinit potencial s'estudia com a un estat teòric on alguna cosa té un potencial il·limitat, ja pot ser de mida, nombre, increment... Per exemple una successió de nombres que poden anar augmentant fins a l'infinit, seria un exemple d'infinit potencial. O també un nombre que li pots anar sumant "1" il·limitadament.

L'infinit actual, en canvi, es coneix com a un element conjunt, acabat, ja realitzat d'una successió infinita. Per exemple el conjunt dels nombres reals és un infinit actual. Aquest tipus d'infinit en ser un element conjunt, es pot representar amb un símbol. Per exemple els nombres reals es poden representar amb el símbol " $\mathbb{R}$ ". És un tipus d'infinit bastant polèmic i contradictori, ja que es representa l'infinit com a una cosa acabada, finita, però només és una manera de representar successions sense haver d'escriure-la tota.

En resum, l'infinit potencial es defineix més com a un potencial infinit, la possibilitat d'incrementar o disminuir infinitament, en canvi, l'infinit actual és un conjunt d'una successió que tendeix a l'infinit.

2.2.3 Teoria dels conjunts.

La teoria dels conjunts és una teoria desenvolupada per Georg Cantor, un matemàtic alemany nascut a Rússia l'any 1883.

Abans de començar s'ha de tenir clar alguns conceptes.

Primer de tot s'ha de recalcar què és un axioma matemàtic, doncs bé, es tracta d'una afirmació o proposició matemàtica que es considera verdadera, sense necessitat d'una demostració. Els axiomes són les bases de les matemàtiques, tots els teoremes matemàtics requereixen una demostració matemàtica partint d'axiomes o veritats fonamentals, i alguns es connecten amb altres, formant una xarxa d'afirmacions que construeixen tota la matemàtica que es coneix. Un exemple d'axioma seria que el nombre 1 més el nombre 1 és igual a dos. És una veritat que no necessita demostració. En canvi, un exemple de teorema podria ser que, en un triangle rectangle, catet al quadrat més catet al quadrat és igual a hipotenusa al quadrat. En aquest cas sí que es necessita demostració matemàtica, ja que no és un axioma, sinó un teorema.

Cantor el que va fer és desenvolupar l'axioma de la infinitud, el qual descriu que existeixen conjunts amb infinits elements. Aquest axioma va ser molt polèmic, ja que molta gent creia que l'infinit no es podia considerar com a una entitat acabada. Això no obstant, actualment s'utilitza molt aquest axioma i és essencial per a certes branques de les matemàtiques. Aquesta afirmació el que dona lloc és a l'existència de conjunts amb nombres infinits, per tant, gràcies a Cantor, ara es poden descriure els nombres racionals, naturals, enters, parells... com a un conjunt.

Per entendre bé els conjunts s'ha de tenir clar què són els nombres reals, designats per la lletra ($\mathbb{R}$). Són tots aquells nombres que es poden associar a una magnitud física, és a dir que existeixen. Dins els nombres reals hi ha els nombres racionals designats per la lletra ($\mathbb{Q}$) que són tots els nombres que són divisions entre dos nombres enters, on el denominador mai és zero: ($\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$). Dins els nombres racionals s'hi troben els nombres enters ($\mathbb{Z}$) són tots els nombres que no tenen decimals: ($\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$), dins els enters hi ha els Naturals ($\mathbb{N}$), són tots els nombres sense decimals, positius: ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$). També hi ha els parells, els negatius, els senars...

Però dins els nombres reals, els que n'hi ha de major quantitat són els nombres irracionals (I). Són aquells nombres que no es poden expressar en forma de fracció de nombres enters. Un exemple seria el (Π), ($\sqrt{2}$), (e) ...

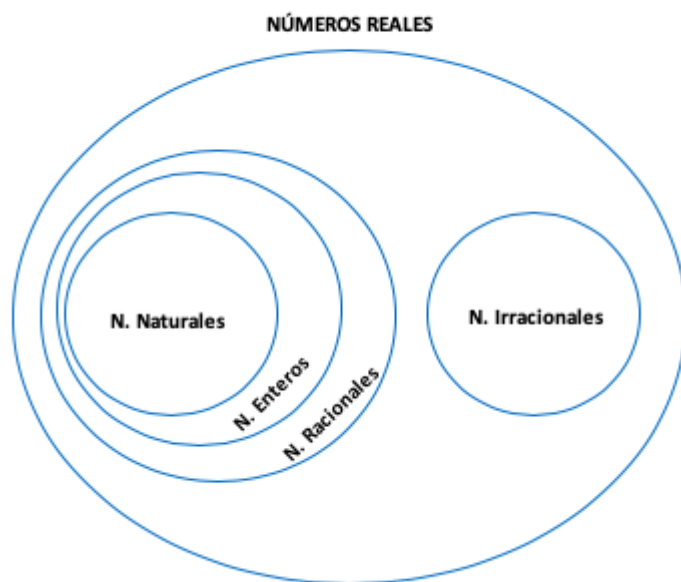


Figura 15: Classificació dels tipus de nombres.

Continuant amb la teoria de Cantor, el que va expressar ell va ser que els nombres naturals, racionals i enters tenen la mateixa quantitat d'elements. Sembla que sigui il·lògic, perquè els enters estan dins dels racionals, i els naturals estan dins dels enters, però això Cantor ho va demostrar de la següent manera:

- Primer de tot va dir que dos conjunts tenen el mateix cardinal (nombre d'elements d'una sèrie) si els elements els quals els formen es poden emparellar en una relació 1 a 1 sense repetir cap element de la sèrie. Per exemple els nombres parells es poden relacionar amb els nombres naturals si s'emparella cada nombre natural amb el seu doble. Per tant, podem dir que els nombres naturals tenen el mateix cardinal que els nombres parells: $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$

- També es poden emparellar els nombres naturals amb els nombres enters, ja que es pot emparellar de la següent manera sense que es deixi cap nombre endarrere reordenant els nombres enters, posat que si no es reordenessin la successió lineal dels nombres enters arribaria a l'infinit pel costat dret (positius) i pel costat esquerre (negatius), per tant, no es

podrien emparellar amb els nombres naturals, que només arriben a l'infinit pel costat dret. En conseqüència, s'han d'ordenar de la següent forma: $(0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots)$.

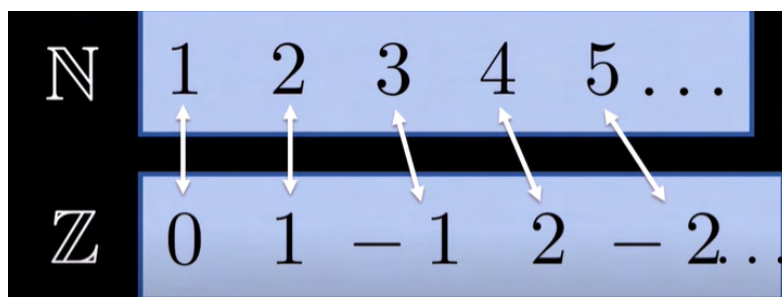


Figura 16: Emparellament entre els nombres enters i els naturals.

Finalment, també es poden emparellar els nombres naturals amb els nombres racionals d'una manera més complicada, però possible. Primer de tot s'ha d'ordenar els nombres racionals en una taula, a la primera fila tots els racionals amb numerador 1, a la segona tots els racionals de numerador 2, i això successivament. Com que haurà quedat una taula infinita, i no una successió lineal, s'hauran d'emparellar els nombres naturals en forma de ziga-zaga per tal d'arribar a l'infinit sense cap nombre desaparellat. També cal tenir en compte que en aquesta taula hi haurà molts nombres repetits com per exemple $(\frac{1}{1})$ i $(\frac{2}{2})$, que són el mateix nombre. Per tant, aquests nombres ja repetits s'hauran de saltar. D'aquesta manera es podran emparellar tots els nombres racionals amb els naturals o enters si es reordenen de la manera anterior.

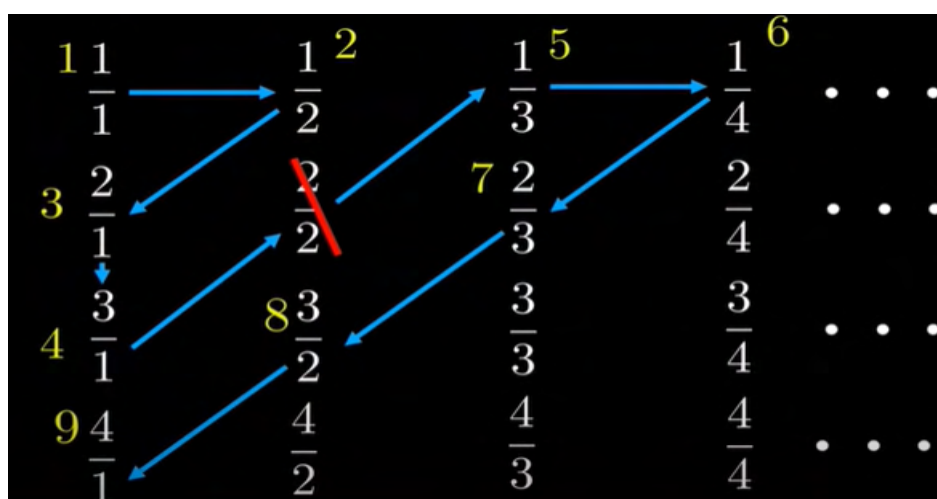


Figura 17: Emparellament entre els nombres naturals i els racionals.

Després de totes aquestes comprovacions es pot concloure que el cardinal dels nombres racionals és igual al cardinal dels nombres enters, naturals i parells: $(|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|)$

Cantor va designar aquest cardinal amb la lletra hebrea ($\aleph_0$), ja que és l'infinit més petit que existeix. Però, n'hi ha un de més gran d'infinit?

La resposta és sí, el cardinal dels nombres Reals ($\aleph_1$) és més gran que el cardinal ($\aleph_0$). Per tant, hi ha infinits de diferent mida.

Per demostrar aquesta afirmació tan precipitada Cantor el que va fer és demostrar-ho mitjançant la reducció a l'absurd o també conegut com a l'argument de la diagonal de Cantor. Un mètode per assegurar que hi ha un infinit infinitament més gran que el cardinal dels nombres enters.

Per entendre-ho primerament s'ha de demostrar que hi ha el mateix cardinal en els nombres reals ($\mathbb{R}$) que en la recta d'interval $(0,1)$.

Per fer això s'ha de trobar una relació o emparellament entre qualsevol punt de la recta $(0,1)$ amb un punt de la recta real, i això és possible geomètricament. Primer de tot s'han de dibuixar les dues rectes, l'interval $(0,1)$ i tota la recta real. Entre aquestes s'ha de dibuixar un cercle perfectament alineat amb l'interval $(0,1)$ del mateix diàmetre. Seguidament, s'escull qualsevol punt de la recta $(0,1)$ i es dibuixa una línia perpendicular a l'interval fins que talli a un punt del cercle (punt A). Seguidament, es traça una línia que passi pel punt A i pel centre del cercle. On talli aquesta recta amb la recta real és el punt que es relaciona amb el punt de l'interval $(0,1)$. Si es fa amb tots els punts de l'interval, es pot relacionar tota la recta real amb aquest interval sense deixar-se ni repetir cap punt. Aquesta mateixa demostració es podria fer amb qualsevol interval existent, per tant, es confirma que el cardinal dels nombres reals és igual al cardinal de qualsevol interval: $(|\mathbb{R}| = |(a,b)|)$.

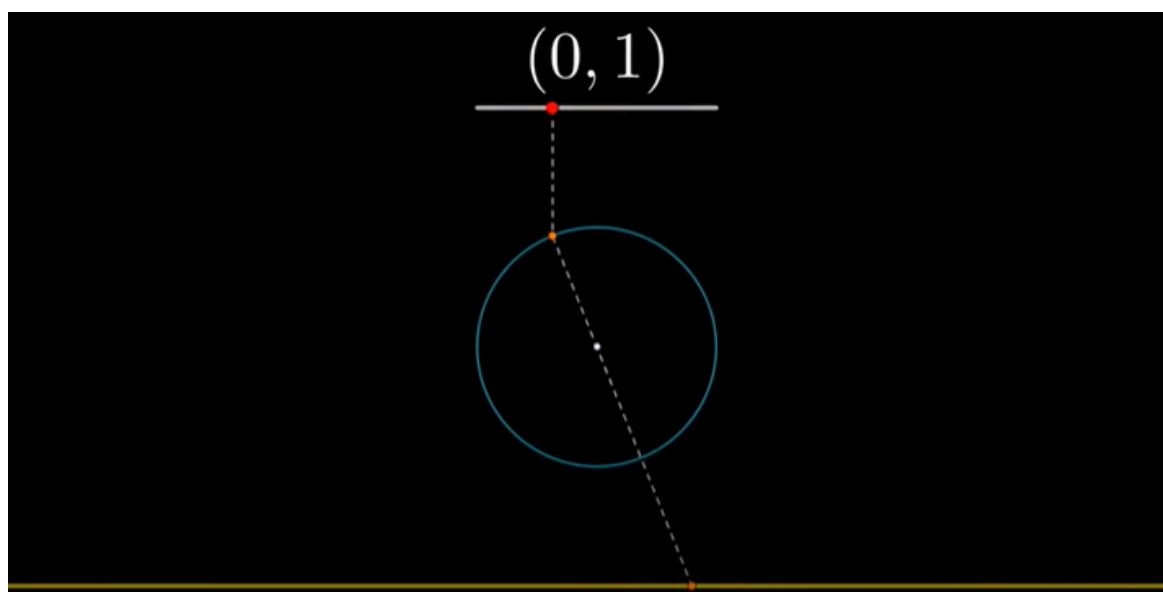


Figura 18: Emparellament entre els nombres reals i l'interval $(0,1)$.

Ara ja es pot passar a fer la reducció a l'absurd, un mètode que s'utilitza en moltes demostracions matemàtiques. Consisteix a assumir com a veritat el contrari del que es vol demostrar, i finalment arribant a certes contradiccions demostrar que el resultat que inicialment es vol demostrar és cert. Primerament, s'ha de considerar el contrari del que es vol arribar, és a dir, considerar que $(|\mathbb{R}| = |\mathbb{N}|)$ i, per tant, s'ha d'intentar relacionar tots els nombres Naturals amb tots els nombres de l'interval $(0,1)$, sabent que té el mateix cardinal que els nombres reals.

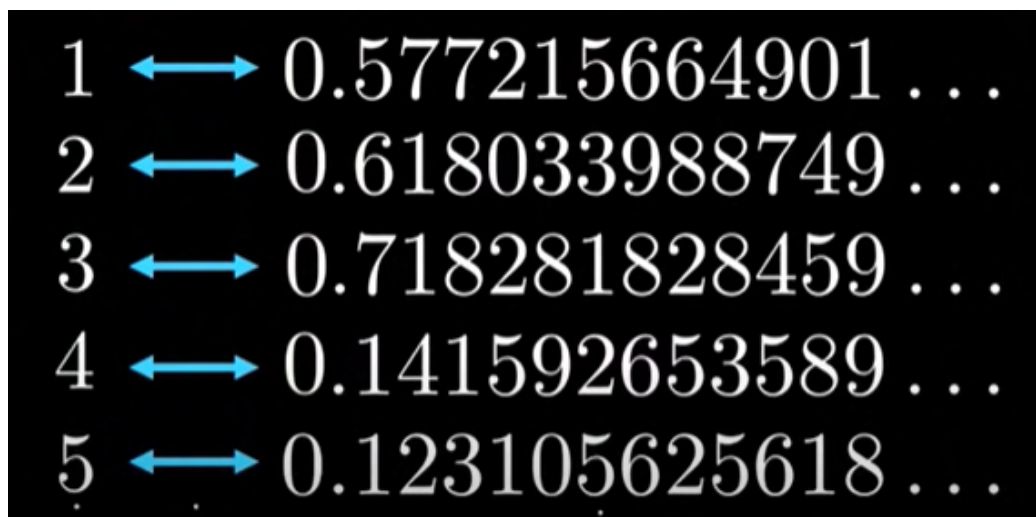


Figura 19: Emparellament dels nombres naturals amb els nombres de l'interval $(0,1)$.

Un cop s'hagi fet aquesta relació cal trobar-hi una contradicció que refuti que tots els nombres reals ja s'han emparellat. El que s'ha de fer és trobar un nombre que no estigui en aquest emparellament infinit, per fer-ho s'ha de mirar el primer dígit del primer nombre emparellat, i escriure un nombre (x) amb un dígit diferent en el primer decimal, seguidament s'ha de mirar el segon dígit del segon nombre emparellat, i escriure al segon decimal del nombre (x) , un dígit diferent del que s'ha mirat. Això s'ha de repetir amb el tercer, quart, cinquè dígit... fins a arribar a infinit, així s'haurà trobat un nombre (x) que no ha estat emparellat, ja que es pot assegurar que no serà igual a cap nombre ja emparellat, per tant, s'ha arribat a una contradicció. Aquest procediment es pot fer amb infinits nombres més, per això es diu que el cardinal dels nombres reals és infinitament més gran que el cardinal dels nombres racionals: $(|\mathbb{R}| > |\mathbb{Z}|)$.

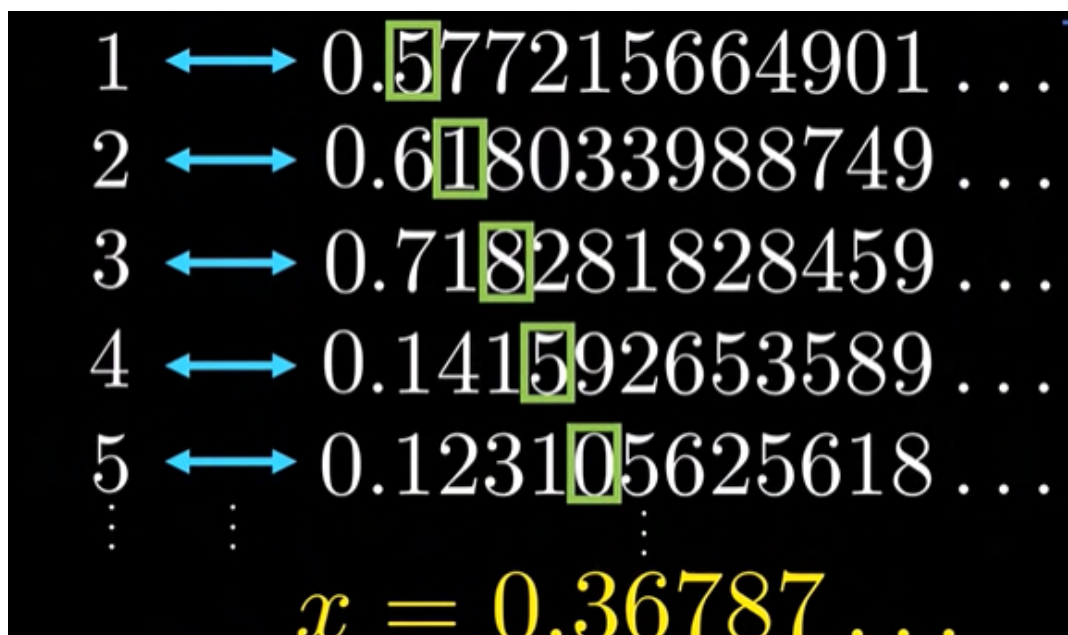


Figura 20: Extracció d'un nombre fora de l'emparellament.

Aquesta afirmació explica que hi ha infinits més grans que altres. ($\aleph_0 < \aleph_1$). Això també es pot explicar veient que dins els nombres reals hi ha els racionals i irracionals. Per tant, hi ha infinits nombres irracionals més que de nombres racionals, cosa que té bastant de sentit sabent que els irracionals són nombres amb decimals infinits sense la repetició de cap patró.

Una altra afirmació que Cantor va descobrir és que hi ha una infinitat d'infinits més grans que l'anterior. Això ho va demostrar amb el conjunt potència. El conjunt potència és totes les combinacions que es poden fer amb els cardinals. És un càlcul molt senzill de combinatòria si es fa amb nombres finits, és simplement elevar 2 al cardinal. Per exemple, si tenim la sèrie (1,2,3), el cardinal és 3, ja que el conjunt té tres elements, i el conjunt potència és 2^3 , per tant, el resultat és 8. Però el que va fer Cantor va ser portar aquest càlcul a l'infinit, per així trobar més infinits. Segons la definició del conjunt potència, aquest és estrictament més gran que el conjunt d'on s'ha extret. Si s'aplica en nombres infinits, es poden trobar infinits més grans.

Exemple finit:

- Hi ha una poma, una pera i una taronja, i es vol trobar totes les combinacions possibles.

Per això elevem 2 al cardinal, en aquest cas 3, ja que tenim tres elements.

$$2^3 = 8 \text{ combinacions possibles.}$$

Com es veu el conjunt potència és més gran que el cardinal, i això passa en tots els casos.

Exemple infinit:

- Hi ha el conjunt dels nombres enters, amb cardinal $\aleph_0$. Per buscar totes les combinacions possibles s'ha de fer el conjunt potència d'aquest cardinal, que és $2^{\aleph_0}$, així es troba un infinit més gran, en aquest cas coincideix al cardinal dels nombres reals ($\aleph_1$). Però si es fes la potència d'aquest cardinal es podria trobar un infinit major, i anar repetint aquest procés per trobar una infinitat d'infinits, més grans que l'anterior.

❖ La hipòtesi del continu:

Aquest és un dels vint-i-tres problemes plantejats pel matemàtic David Hilbert, l'any 1900 durant una conferència. Aquesta hipòtesi diu que hi ha més infinits entre l'infinit dels racionals, i l'infinit dels reals. Georg Cantor creia que no era certa, però el problema d'aquesta hipòtesi és que no es pot ni demostrar ni refutar amb els axiomes matemàtics que s'han establert fins ara. Aquest és un dels principals misteris de la matemàtica actual, i molta gent està treballant a donar solució a aquests problemes. No obstant això, Kurt Gödel, un dels millors lògics de la història, va establir uns teoremes, que deien que hi ha afirmacions que no es poden demostrar ni refutar si els axiomes estan ben construïts. A més no es pot saber si uns axiomes estan ben construïts, ja que només es poden refutar quan es troba una contradicció, i si no se'n troba cap no vol dir que no es pugui trobar en un futur, per tant, tampoc es pot donar un sistema axiomàtic per bo. Això va ser un cop baix per a molts matemàtics, pel fet que segons aquest teorema, molts dels sistemes axiomàtics actuals de les matemàtiques podrien no ser consistents.

2.2.4. Topologia

La topologia és una branca de les matemàtiques que estudia les propietats geomètriques i estructurals dels objectes, com ara les figures i els espais, que no depenen de la seva mètrica exacta. En altres paraules, la topologia se centra en l'estudi de les propietats que es conserven quan s'estira o s'encongeix un objecte sense tallar-lo o deformar-lo molt.

Per exemple, la topologia pot ser utilitzada per estudiar les propietats de les superfícies, com ara la seva connexió, els seus forats i les seves propietats de simetria, sense necessitat de mesurar la seva distància exacta o forma. Per exemple un cub i una piràmide són topològicament iguals, perquè no tenen cap forat, per tant, pots convertir un cub en una piràmide amb una deformació lleu, sense molt esforç.

La topologia és una branca important de les matemàtiques que té moltes aplicacions en àmbits com la física, l'enginyeria, la informàtica, les ciències de la vida i la teoria de la computació.

El concepte d'infinit té una relació directa amb la topologia algebraica, que es defineix com a una deformació contínua d'aquests objectes topològics, també anomenat homotopia. Per tant, si la deformació és contínua, tendeix a l'infinit.

A més, la topologia estudia les propietats geomètriques dels objectes que són definits per conjunts de punts, com ara una superfície o una figura geomètrica. En molts casos, aquestes figures tenen una quantitat infinita de punts, i la topologia estudia les propietats geomètriques d'aquests punts. Per exemple, la circumferència és un exemple d'un objecte que té una quantitat infinita de punts. La topologia estudia les propietats geomètriques d'aquesta figura, com ara la seva forma i la seva continuïtat, però també estudia les propietats del conjunt infinit de punts que conformen la circumferència.

Un altre aspecte important de la relació entre topologia i infinit és que la topologia permet estudiar les propietats geomètriques dels objectes que tenen dimensions infinites. Per exemple, la topologia estudia les propietats dels espais vectorials i les transformacions lineals, que són objectes que tenen dimensions infinites. Un exemple concret d'això és la teoria de les funcions analítiques, que és una branca de la topologia que estudia les propietats de les funcions que són definides per sèries infinites.

Un exemple per entendre bé la topologia és la cinta de Möbius, una cinta que només té una cara i una vora. Per aconseguir-la només s'ha d'agafar una cinta i enganxar-la formant un cercle, però donant-li mitja volta abans d'enganxar els dos extrems. Per molt que es manipuli aquesta cinta amb deformacions lleus, mai canviarà les seves característiques topològiques, sempre estarà formada per una sola cara i un sol costat. També està lligada amb l'infinit, pel fet que en tenir una sola cara es podria caminar a través de la cinta de Möbius sense arribar mai a cap extrem, per tant, les propietats d'aquesta cinta està governada pel concepte d'infinitud.



Figura 21: Cinta de Möbius.

Un altre element geomètric amb unes propietats molt peculiars és la “Banya de Gabriel”. Una figura geomètrica que té una superfície infinita però un volum finit. S’obté en fer girar sobre l’eix de les X, la gràfica de la funció $f(x) = 1/X$. S’obté una espècie de trompeta que tendeix a l’infinit, però cada cop es fa més petita.



Figura 22: Banya de Gabriel.

2.2.5. Fractals

Les fractals són objectes geomètrics que normalment exhibeixen autosimilitud en diferents nivells de magnificació. Això significa que una part de la fractal es veu igual o similar a l'objecte complet, fins i tot quan es magnifica infinitament. És a dir són formes que tenen patrons repetitius que apareixen en infinites escales.

Les fractals són objectes irregulars i complexos que poden ser generats per algoritmes iteratius, de nombres complexos. Aquests algoritmes generen una seqüència de punts que es van repetint i es van iterant en funció de determinades regles, generant així l'estructura fractal. En la part pràctica s'explica millor com es generen les fractals.

Les fractals són presents en la natura en molts aspectes, com ara en la forma de les branques d'un arbre, les fulles d'una planta, els núvols, les muntanyes, les costes, algunes flors, plantes i molts altres fenòmens naturals. També són molt utilitzades en la representació de dades, la compressió d'imatges i en la generació d'art digital.



Figura 23: Col Romanesco.

La teoria de les fractals va ser desenvolupada per Benoît Mandelbrot en la dècada de 1970 i ha tingut un gran impacte en moltes àrees de les matemàtiques i la ciència en general. Aquesta teoria diu que les fractals, depenent de les escales en les quals són mesurades, poden tenir un valor o un altre. Si es mira des de molt lluny, tindrà un valor, però si es mesura des de més a prop, aquest valor augmenta, ja que com més s'augmenti la fractal, més irregularitats apareixen. És per això que les fractals tenen un perímetre infinit, a causa de les infinites irregularitats. Les fractals són una eina molt valuosa per a l'estudi de la complexitat i l'autoorganització en sistemes naturals i artificials, a més, són patrons molt agradables per la vista, per això també són usats en l'art abstracte. Una fractal és una manera molt visual de representar l'infinit, i entendre les seves propietats.

Una altra propietat de les fractals és que tenen una dimensió fraccionària, és a dir no tenen dimensions enteres com pot ser una línia de dimensió 1, un pla de dimensió 2 o un volum de dimensió 3. Una fractal es mou entre aquestes dimensions, per exemple la dimensió fractal del Floc de neu de Koch és d'1,26. En altres paraules les fractals tenen dimensions fraccionàries.

Hi ha diferents tipus de fractals:

- Fractals lineals

Són fractals molt senzilles, es tracta la divisió infinita d'una línia. Se'n pot generar una dividint una línia en dues parts, després dividir el resultat també en dos, i repetir aquest procés infinitament. És la primera fractal que mai s'ha inventat, i també la menys complexa.



Figura 24: Fractal lineal.

- Fractals de funcions iterades

Són fractals que es formen a partir d'un sistema iterat de funcions. És simplement una figura geomètrica que es va repetint a dins seu o al perímetre d'aquesta, cada vegada de menor dimensió, cosa que causa una semblança per molt que es magnifiqui.

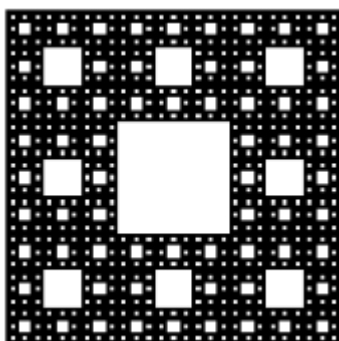


Figura 25: Fractal de funció iterada.

- Fractals complexes

Aquestes fractals són resultat d'una iteració de nombres complexos (nombres formats per un nombre real i un imaginari), operats amb qualsevol operació matemàtica.

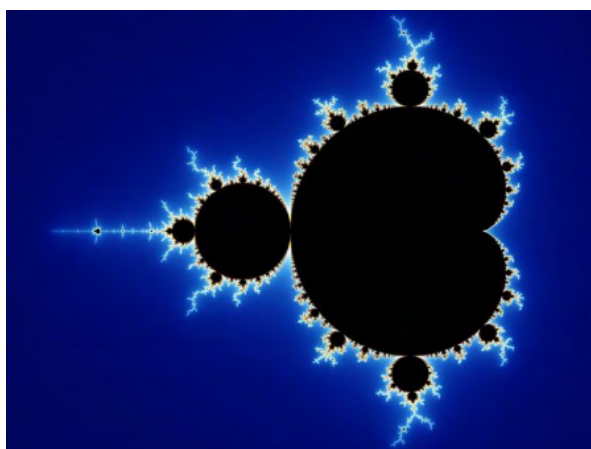


Figura 26: Fractal de Mandelbrot.

- Òrbites caòtiques

Són espirals que formen unes òrbites, tret d'una fórmula senzilla.

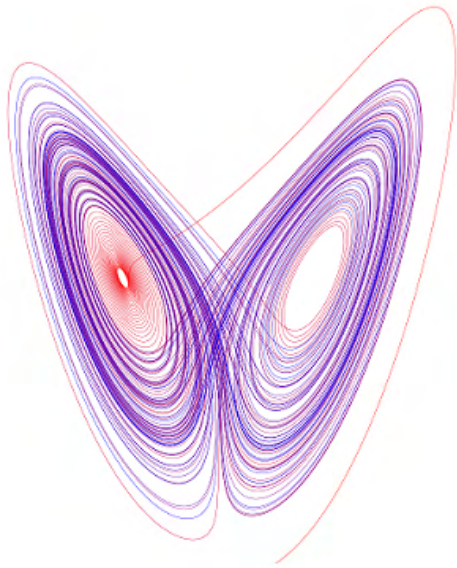


Figura 27: Òrbita caòtica.

- Plasmes

Són taques de colors diferents que no segueixen cap ordre concret, és a dir tenen formes irregulars, per tant, cada figura de plasma és única, que li dona una dimensió fractal. En aquest cas no hi hauria autosimilitud, però es considera fractal, ja que té dimensió fraccionària. El mateix passaria amb els relleus geogràfics.

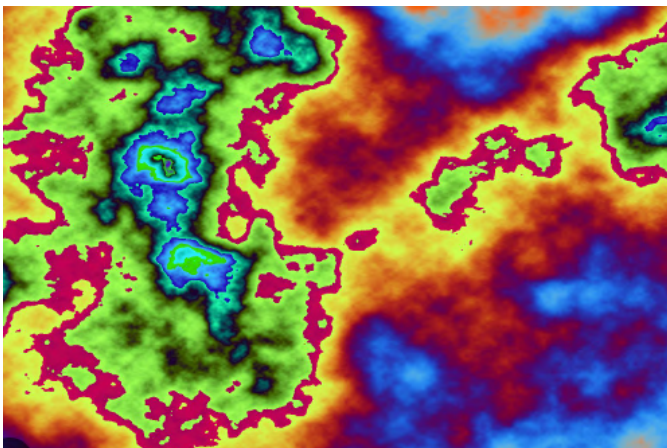


Figura 28: Fractal de plasma.

- Autòmats cel·lulars

Són sistemes dinàmics discrets, és a dir que el temps es mesura en lapsus temporals, i l'espai té valors discrets. Com a resultat és simplement un gràfic on es calcula el valor d'una

variable. Si es repeteix aquest procés en un temps infinit, però dividit en lapsus temporals discrets s'obtenen fractals.

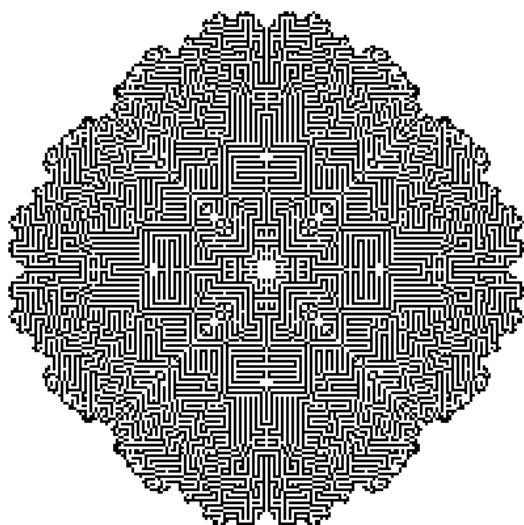


Figura 29: Autòmat cel·lular.

- També existeixen fractals de dimensió superior a 3, per tant, visualitzar una fractal d'aquest tipus és el més pròxim a poder visualitzar un objecte de 4 dimensions.

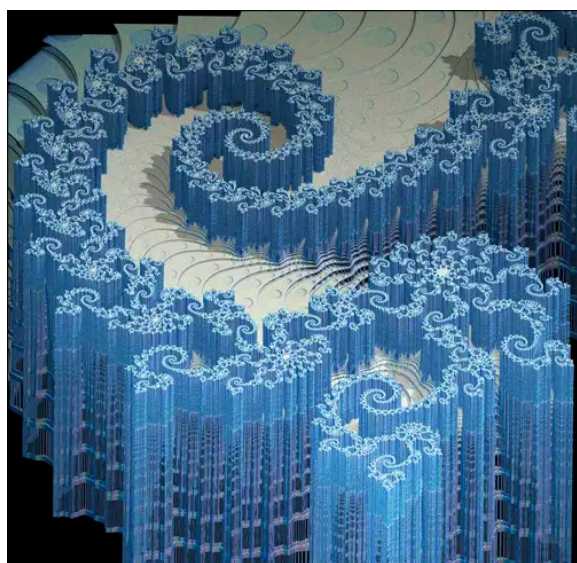


Figura 30: Fractal complexa de tres dimensions.

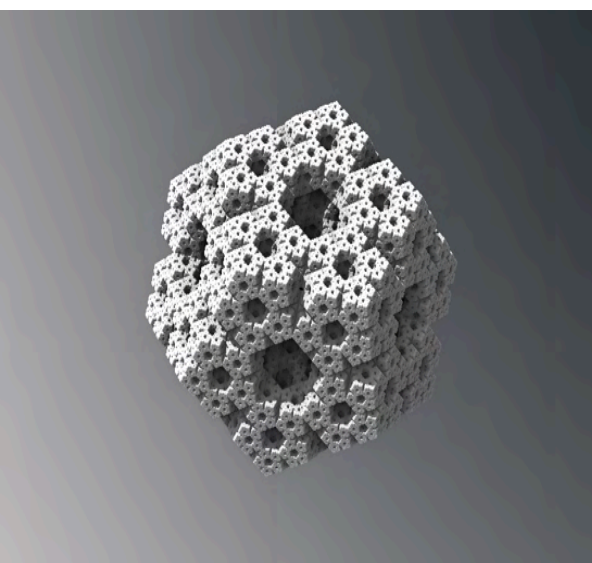


Figura 31: Fractal de funció iterada de tres dimensions.

2.3. L'infinit a la física

2.3.1. Introducció

En física, l'infinit pot prendre diferents significats i usos, depenent del context en què s'utilitza. Algunes de les seves aplicacions més comunes són les següents:

- Infinit com a límit: en física, sovint es fa servir el concepte d'infinit com a límit d'una successió o funció. Això es fa servir, per exemple, en el càlcul d'integrals, derivades o en la definició de les lleis del moviment. Per tant, en aquest cas està molt lligat amb les matemàtiques.
- Infinit com a grandària física: en algunes teories físiques, com ara la relativitat general, l'espai i el temps poden prendre valors infinits. En algunes situacions físiques, com ara els forats negres, es fa servir el concepte d'infinit com a singularitat. Això significa que les lleis de la física deixen de ser vàlides en aquest punt, ja que la massa i l'energia es concentren en un espai infinitament petit, és a dir, en aquest punt l'espai-temps és definit per a una curvatura infinita.
- Infinit en la física quàntica: la física quàntica, per altra banda, és la física que estudia els fenòmens en l'àmbit microscòpic, és a dir partícules atòmiques i subatòmiques, les seves propietats i el seu comportament. En aquest àmbit l'infinit pot jugar un paper important quan es tracta de la teoria de camps quàntics o bé el principi d'incertesa de heisemberg. A part, és una eina per a fer càlculs matemàtics.

També té altres aplicacions en altres àmbits de la física, però són menys rellevants.

En general, l'ús de l'infinit en física depèn del context i de la teoria o model físic que s'estigui considerant. En tots els casos, però, és rellevant recordar que l'infinit és un concepte abstracte i matemàtic, i que no té una existència física real, ja que no és possible mesurar-lo ni estudiar-lo de manera física, pel fet que la matèria és contínua, és a dir està formada per àtoms i partícules més petites, però són finites. Per tant, en física l'infinit és més aviat usat com a una eina matemàtica per a obtenir resultats més aproximats a la realitat, i simular magnituds de molt grans o petites dimensions.

2.3.2. Astronomia

L'astronomia és una branca de la ciència que estudia els objectes i els fenòmens celestes, com ara les estrelles, els planetes, les galàxies i les nebuloses, així com els processos físics que els governen. Per tant la major part de l'astronomia és física, i dins totes les teories en relació amb l'univers, l'infinit és un concepte molt polèmic, ja que hi ha molts fenòmens dels quals se sap molt poc, pel fet que són molt complexos, i sempre hi entra l'infinit per poder explicar-los. Sempre surten les mateixes preguntes:

- És infinit l'univers?
- Existeix més d'un univers?

La resposta encara no es pot demostrar, però han sorgit diferents teories al llarg de la història.

El que s'ha demostrat és que l'univers s'expandeix esfèricament com si fos una bombolla que es va fent més gran. Aquest fet dona raons per a pensar que l'univers no és infinit, pel fet que si fos infinit, seguint la lògica, no es podria expandir. És a dir un espai que és el màxim gran possible lògicament no pot ser més gran. D'aquí han sorgit moltes teories, com la idea que l'univers està format per una curvatura espacial. En aquest cas, si s'arriba a un extrem d'aquest, s'apareix a l'altra banda. És com si la superfície d'una bombolla fos la mateixa en cada punt, per tant, si s'està en un punt d'aquesta superfície, s'està en tots els punts de la superfície a la vegada. En conseqüència, es podria dir que l'espai dins el nostre univers és totalment limitat, però cap cos podria sortir-ne.

Per altra banda, també existeix una teoria totalment contrària. L'univers és infinit, i l'espai s'expandeix, però dins d'un espai que és infinit. És una situació físicament impossible si s'aplica la física clàssica, però hi ha molts fenòmens que a gran escala són possibles malgrat que semblin surrealistes. Això no obstant, de la mateixa manera que hi ha infinites línies d'una dimensió en un pla de dues dimensions i infinites figures de dues dimensions en un cub, podríem dir que si l'univers fos infinit, seria perquè hi ha infinites figures de tres dimensions, i per tant l'univers seria un objecte de quatre dimensions.

En el cas que la primera teoria fos certa (l'univers és finit), l'univers es podria comparar amb una caixa que conté un nombre finit de partícules, en un sistema on l'energia ni entra ni surt. Aquestes partícules s'agrupen i es desagrupen, formant combinacions diferents cada vegada. Si es deixés passar un temps il·limitat, aquestes partícules es podrien combinar de totes les maneres possibles, per tant, es podrien crear i destruir una infinitat d'universos, on cal remarcar que si el temps és infinit, en haver-hi una quantitat limitada de combinacions

diferents, cada combinació es repetiria infinites vegades. En conseqüència tot podria existir en aquesta caixa, totes les realitats que podem imaginar serien possibles, però en temps diferents.

Una altra teoria és que l'espai està format no només per a un únic univers, sinó per a infinits universos. Això voldria dir que igual que el que passa dins la caixa mencionada anteriorment, com que hi ha infinits universos diferents amb un nombre limitat de molècules en cada univers, existiran totes les combinacions possibles, però en aquest cas coexistirien simultàniament en el mateix temps, però en espais diferents. Aquest fenomen s'anomena multivers. Això és un dels molts exemples que demostren el poder que té el temps il·limitat.



Figura 32: Multivers.

2.3.2.1. L'infinit en la teoria de la Relativitat general

La Relativitat general és una teoria proposada pel físic Albert Einstein. Una extensió de la física que se centra molt a estudiar camps gravitatoris, i com aquests afecten l'espai-temps. Per tant, en l'univers existeixen fenòmens que es relacionin amb els camps gravitatoris i l'infinit?

La resposta és sí, existeixen certs fenòmens on intervé l'infinit, tot i que en el cas d'alguns encara no se n'ha demostrat l'existència, ja que són fenòmens extrems de la teoria.

- Els forats negres

Els forats negres són restes d'estrelles mortes, que tenen una densitat tan elevada, que causa una curvatura infinita en l'espai temps, en un punt, que s'anomena singularitat. És tan gran la força gravitatòria, que ni tan sols la llum, la partícula que amb més velocitat viatja de l'univers, pot escapar-ne.

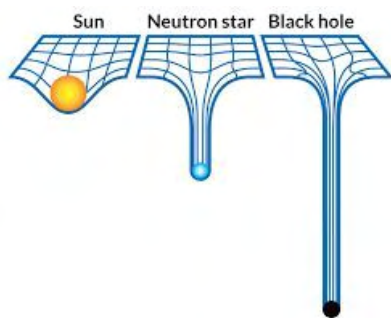


Figura 33: Deformació de l'espai-temps causada per un forat negre.

El naixement d'un forat negre és degut a la mort d'una estrella d'una magnitud molt gran. Les estrelles moren quan es queden sense combustible, això causa una explosió anomenada supernova. Totes les restes de l'estrella que ha mort, són inertes, sense energia, per tant, comencen a replegar-se fins a formar un punt de volum zero, amb una densitat infinitament gran, ja que no hi ha cap força externa que compensi la força gravitatòria de la mateixa estrella. És com si l'estrella col·lapsés sobre si mateixa.

Aquesta estrella no deixa escapar ni la llum, per això tenen un aspecte totalment negre. A més, atrauen matèria, per això sempre orbiten gasos al voltant d'un forat negre. Aquests poden escapar del forat negre, mentre no passin l'horitzó de successos, que és en aquell punt on la força gravitatòria és tan elevada que per escapar es necessitaria una velocitat més elevada que la de la llum, cosa que és pràcticament impossible.

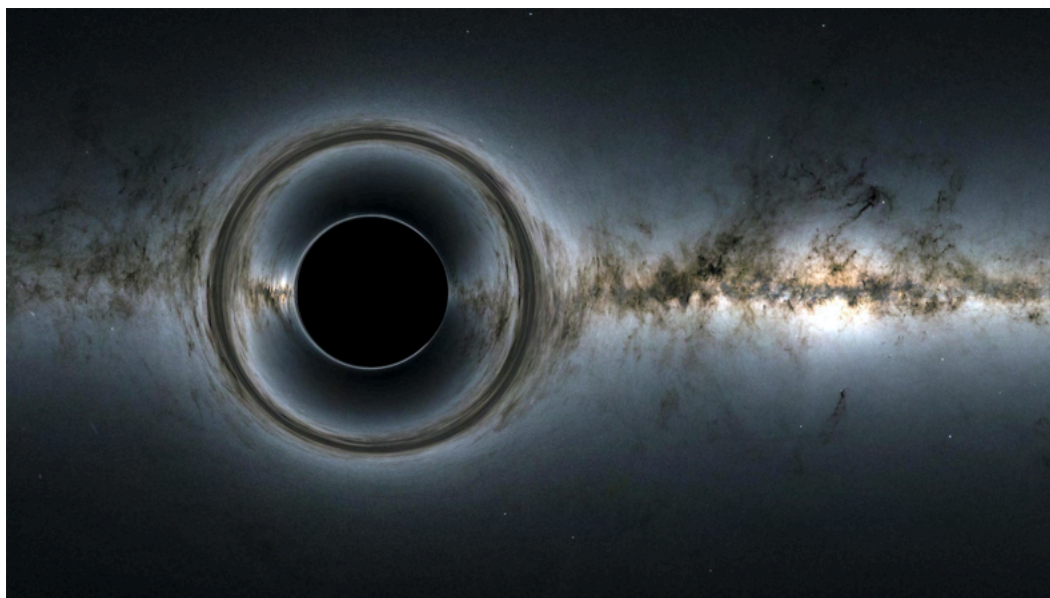


Figura 34: Forat negre.

El gran misteri dels forats negres és que dins l'horitzó de successos, la física que es coneix fins ara, no és vàlida, i es necessita una nova física per a estudiar aquest fenomen. És per

això que l'infinit hi juga un paper molt important, ja que és l'única eina per la qual es pot entendre què és i com es comporta un forat negre.

- Forats de cuc

Un altre hipotètic fenomen astronòmic molt peculiar és el forat de cuc o pont d'Einstein-Rosen, una característica topològica de l'espai temps descrita per l'equació de la relativitat, que et permet viatjar instantàniament d'un punt de l'univers a un altre, és a dir, un doblegament de l'espai temps.

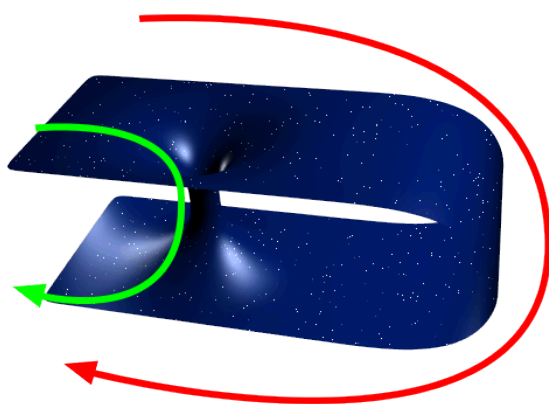


Figura 35: Representació d'un forat de cuc.

Se sol pensar que la drecera més ràpida per arribar d'un punt a l'altre és en una línia recta, però, si es doblega l'espai, els dos punts es connecten, i, per tant, es pot viatjar d'un punt a l'altre en menys d'un instant. Aquest succés és simplement una hipòtesi, ja que encara no s'ha demostrat l'existència d'aquest, només és fruit d'una equació. Es pot relacionar amb l'infinit, pel fet que si es pogués viatjar a través de forats de cuc, es podrien arribar a llocs de l'univers que són inabastables, per culpa de la gran distància que ens separa d'ells. Hi ha racons de l'univers on ni la llum arriba, per tant, utilitzant aquest fenomen seria equivalent a viatjar a una velocitat infinita.

2.3.3. L'infinit en la Quàntica

La física quàntica és una branca de la física que estudia els fenòmens a escala microscòpica, és a dir estudia partícules subatòmiques. Hi ha algunes parts de la quàntica que es relacionen amb l'infinit.

- Teoria de camps quàntics

Quan imaginem l'infinit en la quàntica pensem en objectes o partícules infinitament petites, però existeixen? L'espai es pot dividir infinites vegades?

La resposta és complicada, ja que com se sap la matèria no és contínua, sinó que té unitats elementals que no es poden dividir les quals s'anomenen quarks, però, podrien existir partícules més petites que encara no s'han descobert o encara no s'han demostrat.

Quant a l'espai, segons una teoria que uneix la quàntica amb la relativitat general, la quantitat mínima d'espai que pot existir és de 10^{-33} cm , aquesta és la longitud de Planck.

Malgrat que podria semblar que no, hi ha diversos fenòmens on l'infinit té un paper molt important. Entre els quarks existeixen certes interaccions o forces elementals, necessàries per a unir-los. Aquestes forces són transmeses per unes partícules molt concretes. Aquestes interaccions són transmeses pels gluons, unes partícules elementals que no tenen massa ni càrrega, per tant, es podria considerar que són infinitament petites. L'infinit també apareix en altres àrees d'aquest camp, però són massa complicades d'explicar i d'entendre. Aquestes interaccions quàntiques són estudiades per l'electrodinàmica quàntica, i la cromodinàmica quàntica. A part de sorgir l'infinit com a partícules sense massa, en molts casos és necessari l'infinit per a aproximar càlculs el màxim semblant a la realitat.

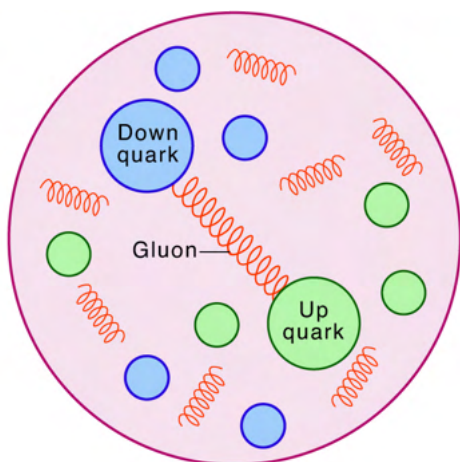


Figura 36: Representació de la interacció entre quarks i gluons.

- Principi d'incertesa de Heisemberg

L'infinit també apareix en el principi d'incertesa de Heisemberg, que ens diu que no es pot determinar, simultàniament, certes magnituds físiques d'un objecte amb una precisió infinita, com poden ser la posició d'una partícula i el seu moment lineal, el qual és el producte de la massa per la velocitat de la partícula. Per tant, la incertesa de la posició d'aquesta partícula si és infinitament petita, la incertesa del moment lineal de la partícula serà molt gran i viceversa. En altres paraules, si es coneix la posició, no es pot conèixer el moment lineal, en

canvi, si es coneix el moment lineal, no es podrà conèixer la posició. A més a més, aquest principi assegura que el simple fet d'observar una partícula subatòmica modifica el seu comportament i la seva naturalesa, per tant, existeix una incertesa molt gran sobre les característiques d'aquestes molècules.

Per posar un exemple, per saber la posició d'un electró i observar-lo en un microscopi s'hauria de fer col·lidir un fotó de llum contra ell, i com a resultat en el moment de la col·lisió se sabria la seva posició, ja que la llum rebotaria i ho podríem observar, però aquesta col·lisió canviaria les característiques de l'electró i no es podria saber a quina velocitat venia ni d'on venia l'electró. Per tant, pel simple fet de veure-ho, és a dir fer-hi arribar llum, modificaria les propietats de l'electró per sempre.

El principi d'incertesa també existeix a escales més grans, però l'efecte que fan els fotons de llum a objectes més grans és irrellevant, en conseqüència, no s'evidencia cap efecte.

En aquest cas l'infinit es relacionaria com a una probabilitat impossible, és a dir infinitament petita de conèixer certes propietats físiques simultàniament amb una certesa del 100%, per tant, amb precisió infinita.

2.4. L'infinit a la Filosofia

L'infinit és un concepte molt estudiat i investigat en l'àmbit filosòfic, a causa de les propietats tan especials que aquest presenta. Des del naixement de la filosofia s'ha parlat de l'infinit, i la manera de veure'l i entendre'l ha anat canviant depenent del context de l'època. Etimològicament, es defineix com a una cosa que no té fi, però hi ha hagut molts filòsofs amb idees contràries i molt diverses.

Els principals filòsofs que van parlar de l'infinit són els següents:

- Anaximandre

Anaximandre fou un filòsof grec presocràtic que va viure al segle VI aC. És considerat un dels primers pensadors occidentals que va intentar raonar i buscar explicacions sobre l'univers.

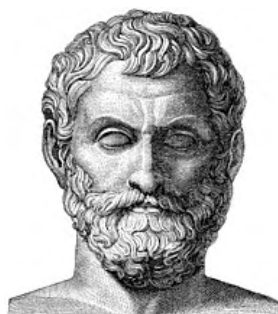


Figura 37: Anaximandre.

Anaximandre va dir que l'univers estava format per a una substància indefinida i eterna, de la qual en deriva tot el que existeix a l'univers abans que es conegués l'existència dels àtoms, i li va posar el nom grec "apeirón" que significa literalment que no té límits. Per tant, es pot relacionar aquesta substància amb l'infinit, ja que és eterna i il·limitada. A més ell mateix va definir l'infinit com a una absència de límits.

- Parmènides

Parmènides fou un filòsof presocràtic que va viure a Grècia al segle VI aC. És conegut per la seva obra “Sobre la naturalesa”, on parla sobre una interpretació filosòfica diferent sobre la realitat respecte a altres filòsofs.

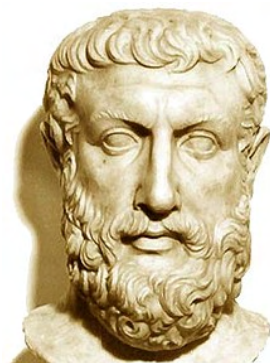


Figura 38: Parmènides.

Per a Parmènides, l'infinit no tenia cap significat fonamental en la seva concepció de la realitat. Parmènides sostenia que només existia l'ésser, que és etern, immòbil i immutable. Segons ell, l'ésser és únic i no pot ser creat ni destruït, i tampoc pot canviar de forma o qualitat, per tant, per ell, l'essència de l'ésser és etern, com a resultat, està lligat a l'infinit. En altres paraules ell no considerava que l'infinit existís, sinó que només és una qualitat innata de l'ésser, una qualitat lligada amb l'eternitat.

- Anaxàgores

Anaxàgores va ser un filòsof grec presocràtic que va viure al segle V aC. Es coneix per les seves aportacions en diferents camps com la filosofia natural o la cosmologia.



Figura 39: Anaxàgores.

Ell creia que l'univers estava format per una varietat de molècules minúscules i indivisibles que es combinaven entre elles per a formar els elements que ho conformen tot. A aquestes molècules les va anomenar “homoimeries”. Aquestes partícules serien per a Anaxàgores el límit de la matèria, per tant, va ser el primer a establir un límit, i en utilitzar aquesta paraula,

directament relacionada amb l'infinit. A més ell va dir que amb la combinació de les “homoimeries” es podien crear infinites molècules, objectes.

- Zenó d'Elea

Zenó d'Elea va ser un filòsof grec presocràtic que va viure al segle V aC. És conegut per les paradoxes que va crear, les quals van qüestionar el coneixement de l'època i van influir en el desenvolupament de la lògica i la filosofia.

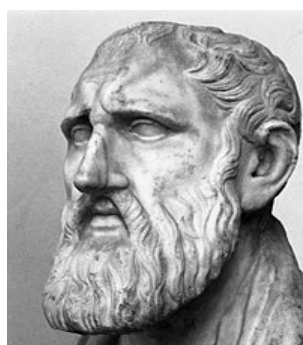


Figura 40: Zenó.

Zenó va estudiar l'infinit més objectivament amb relació a altres filòsofs, i va qüestionar la seva existència, i sobretot la seva relació amb el moviment, com per exemple el fet d'avançar en un espai que es va fent infinitament més petit. De tots els seus plantejaments van sorgir algunes paradoxes que en aquell temps no es van poder resoldre. Per exemple la paradoxa d'Aquil·les i la tortuga. Gràcies a Zenó va començar a aparèixer més curiositat sobre l'infinit, i més persones van intentar entendre'l.

- Aristòtil

Aristòtil va ser un filòsof grec nascut l'any 384 aC. Es considera un dels filòsofs més importants de tota la història. Va ser deixeble de Plató i va fundar la seva pròpia escola filosòfica, el Liceu.



Figura 41: Aristòtil.

Per Aristòtil, l'infinit és una noció abstracta que es refereix a processos o magnituds sense límits determinats. No és una entitat en si mateixa, sinó una idea de límit o potencialitat. Ell

considera que l'infinit no existeix com a una substància, per tant, ell distingeix l'infinit en dos tipus: l'infinit actual, que és una substància infinita, cosa que creia que és impossible la seva existència, i l'infinit potencial que és una addició infinita a una quantitat, doncs, ho relacionava molt amb les matemàtiques. L'infinit és un concepte abstracte i no una realitat tangible, és a dir no es pot considerar l'infinit com a un conjunt. Va arribar a la conclusió que l'infinit no pot existir en la realitat físicament, en canvi, matemàticament sí que pot existir, i es pot utilitzar com a una eina per a aproximar càlculs físics.

- Arquimedes

Arquimedes va ser un matemàtic, físic i enginyer grec que va viure al segle III aC. És considerat un dels científics i matemàtics més rellevants de l'antiguitat clàssica.

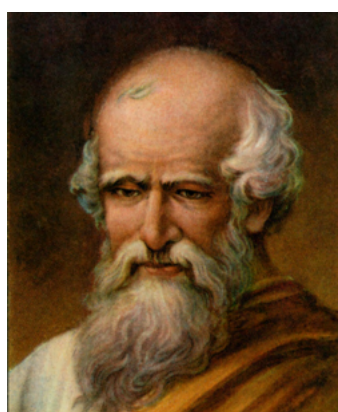


Figura 42: Arquimedes.

Arquimedes va usar l'infinit com a una eina per a aproximar resultats geomètrics al màxim a la realitat. Per fer això encara no existia el càlcul integral, però ell feia una cosa semblant, dividint les formes geomètriques a talls més petits que es poguessin calcular, per tal d'obtenir millors resultats. A més a més, va definir l'infinit com a un nombre que pot ser sempre més gran que qualsevol nombre existent.

- Pascal

Blaise Pascal fou un matemàtic, físic, filòsof i teòleg francès del segle XVII. Va fer rellevants contribucions en diversos camps del coneixement i es coneix per la seva obra "Pensaments".



Figura 43: Pascal.

Per a Pascal l'infinit era un concepte molt complex que tocava diferents àmbits, com les matemàtiques, la filosofia i la religió. Matemàticament, Pascal definia l'infinit com a nombres que poden créixer indefinidament, igual que Aristòtil. Des del punt de vista filosòfic, ell creia que és un concepte que supera la capacitat de comprensió humana, i és quasi impossible de definir-lo i comprendre'l, per tant, no és un concepte que es pugui estudiar. L'infinit per a ell va més enllà de l'experiència i la raó. Quant a la religió, va relacionar l'infinit amb la dimensió divina, i va dir que només a través de Déu es pot experimentar el plaer infinit, doncs, va atribuir a Déu una qualitat d'infinit poder.

- Immanuel Kant

Immanuel Kant va ser un filòsof alemany del segle XVIII. És considerat un dels pensadors més rellevants de la filosofia occidental. Va realitzar contribucions en diversos àmbits, com la metafísica, l'ètica, l'estètica i l'epistemologia.



Figura 44: Kant.

Kant va parlar bastant sobre l'infinit, la seva gran aportació va ser distingir entre l'infinit en el sentit matemàtic, que és la idea d'un conjunt que creix o disminueix il·limitadament, un concepte molt necessari per a la comprensió de les matemàtiques, i l'infinit en el sentit dinàmic, que implica la idea d'un procés o objecte que mai no arriba a un estat final o complet és a dir mai acaba completant-se. Un exemple d'infinit dinàmic és la paradoxa d'Aquil·les i la tortuga, el problema mai s'acaba de completar. Kant va reconèixer que l'infinit en el sentit matemàtic és una noció necessària, però va assenyalar que no es pot aplicar amb conceptes relacionats amb la física, de la mateixa manera que ho deia Aristòtil.

- Hegel

Georg Wilhelm Friedrich Hegel va ser un filòsof alemany que va viure al segle XIX. És també considerat un dels pensadors més importants de la filosofia occidental. Va desenvolupar un sistema filosòfic complex, el qual abastava àmbits com la metafísica, l'ètica, la història i l'estètica.



Figura 45: Georg Hegel.

Per a Hegel, l'infinit és un concepte fonamental en la seva filosofia. No es refereix simplement a una potencialitat, sinó a una qualitat inherent a la realitat i a l'ésser. L'infinit és la naturalesa de l'esperit i l'ànima, que estan en constant canvi i evolució. Segons Hegel, és mitjançant la mediació i la dialèctica on l'esperit manifesta la seva infinitud des d'un punt de vista filosòfic. En resum per a Hegel l'infinit és l'essència de l'ésser i la realitat. Hegel va aplicar aquesta concepció de l'infinit en diferents àmbits, com ara la història, la cultura, la religió i la filosofia. També va argumentar que la religió i la filosofia també busquen abastar l'infinit, aquest constant canvi, a través de la seva recerca de la veritat i la reconciliació dels contraris.

- Georg Cantor

Georg Cantor va ser un matemàtic alemany que va viure a finals del segle XIX i principis del segle XX. És conegut per les seves contribucions fonamentals en el camp de l'anàlisi matemàtica.

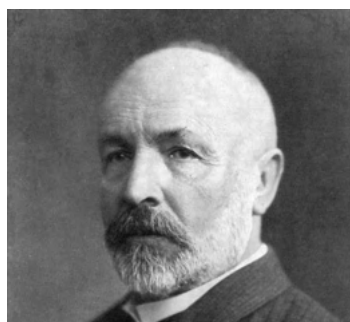


Figura 46: Georg Cantor.

Georg Cantor va elaborar la teoria dels conjunts i va distingir els diferents tipus d'infinit: Infinit comptable i infinit no comptable.

L'infinit comptable es refereix a conjunts que tenen el mateix cardinal que el conjunt dels nombres naturals els quals són considerats infinitament “numerables”, és a dir es poden escriure tots en una sèrie sense deixar-se'n cap.

D'altra banda, l'infinit no comptable es refereix a conjunts que tenen una cardinalitat més gran que el conjunt dels nombres naturals. Els nombres Irracionals i fraccions decimals infinites, és un exemple d'infinit no comptable. Aquest conjunt té una cardinalitat més gran que la del conjunt dels nombres naturals i és considerat “no numerable”, és a dir no es poden escriure tots en una sèrie sense deixar-se'n cap.

- Gottlob Frege

Gottlob Frege és un filòsof i matemàtic alemany que va viure al segle XIX i principis del segle XX. És considerat un dels fundadors de la lògica moderna i de la filosofia analítica.



Figura 47: Gottlob Frege.

Segons Frege, l'infinit es divideix en dos tipus diferents infinit potencial i infinit actual. L'infinit potencial permet l'augment indefinit de les sèries numèriques, mentre que l'infinit actual representa un nombre infinitament gran ja acabat, que se sol representar amb un símbol, és a dir és un conjunt infinit. Aquests conceptes són importants per a la comprensió de la matemàtica i s'utilitzen per establir límits i expressar una extensió sense fi.

- Hilbert

David Hilbert va ser un matemàtic alemany que va viure entre els anys 1862 i 1943. És reconegut com un dels matemàtics més rellevants del segle XX i va fer contribucions en diversos camps de les matemàtiques.



Figura 48: David Hilbert.

Segons David Hilbert, l'infinit és una entitat real i activa en el camp de les matemàtiques. No es tracta només d'una quantitat indefinidament gran, sinó d'un principi necessari per a la coherència i la comprensió dels sistemes matemàtics. Hilbert argumentava que l'infinit és accessible a través de procediments i operacions matemàtiques, i que és fonamental per establir relacions a les propietats matemàtiques. A part d'això, Hilbert va intentar demostrar el poder de l'infinit amb algunes paradoxes i exemples pràctics com "l'hotel de Hilbert", i també va demostrar que una suma infinita de nombres pot ser finita.

- Martin Heidegger

Martin Heidegger va ser un filòsof alemany del segle XX. És conegut per a la seva influent obra en el camp de l'existencialisme. És considerat un dels pensadors més importants del segle XX.



Figura 49: Martin Heidegger.

Segons Martin Heidegger, l'infinit no és una qualitat objectiva del món, sinó que està connectat amb l'existència humana. L'infinit es manifesta quan es pren consciència de la finitud humana i quan es busca transcendir les limitacions individuals. Aquesta comprensió de l'infinit es basa en l'experiència de responsabilitat ètica i en la relació amb altres persones. És a través de tot això on es pot experimentar l'infinit com a part essencial de

l'existència. En altres paraules l'infinit per a Heidegger és simplement la veritat de l'existència, i ell proposa camins per a arribar-hi.

- Teilhard de Chardin

Pierre Teilhard de Chardin va ser un paleontòleg, teòleg i filòsof francès que va viure a la segona meitat del segle XX. És conegut per la seva visió única que combina la ciència, la religió i la filosofia per a comprendre la naturalesa de l'univers i l'evolució de la consciència humana.



Figura 50: Teilhard de Chardin.

Per Teilhard de Chardin l'infinit és una realitat vital i espiritual de l'univers. És una força evolutiva que impulsa l'expansió de la consciència humana i la unió amb la Divinitat. En altres paraules l'infinit és el retrobament amb Déu i amb un mateix. L'infinit es manifesta en l'evolució cap a un estat de plenitud i consciència, representat pel concepte de "Punt Omega". Aquest Punt Omega simbolitza el punt culminant de l'evolució, on tot convergeix en una unitat més profunda amb Déu. L'infinit segons Teilhard, també és una dimensió espiritual que guia l'univers cap a la divinitat i la puresa. Cal destacar que les seves idees han generat debat i interpretacions diverses, i la seva obra ha tingut una influència significativa en els camps de la teologia i la filosofia. Teilhard de Chardin ha estat considerat com un pensador amb una visió única de l'infinit i la seva relació amb l'evolució i el sentit de l'univers.

- Emmanuel Levinas

Emmanuel Levinas va ser un filòsof francès nascut a Lituània el 1906. És conegut per la seva influent obra en l'àmbit de l'ètica.

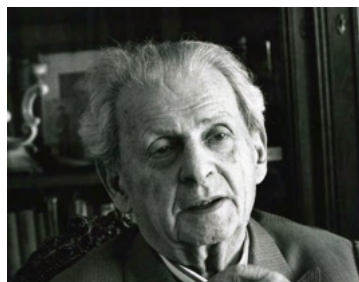


Figura 51: Emmanuel Levinas.

Segons Emmanuel Levinas, l'infinit es manifesta en la responsabilitat ètica i en la relació amb l'altre ésser humà, igual com pensava Teilhard de Chardin. És en aquesta relació que experimentem una exigència de compromís incondicional cap a una altra persona, i aquest sentiment segons ell és l'infinit. També pensava que l'infinit no és una noció abstracta, sinó una realitat que s'experimentava en la nostra experiència quotidiana. És a través de la vulnerabilitat davant d'una altra persona que es pot arribar a connectar amb aquesta dimensió infinita i a més que es comprèn la importància d'entregar-se en l'amor i el servei cap a un altre.

- Jacques Derrida

Jacques Derrida va ser un filòsof francès nascut el 1930. Va ser conegut com un dels principals pensadors d'un moviment filosòfic conegut com a deconstructivisme.



Figura 52: Jaques Derrida.

Segons Jacques Derrida, l'infinit és un concepte que no pot ser definit o mesurat plenament. És un concepte impossible de comprendre i menys abastar, cosa que desafia els límits de la raó i el llenguatge. La infinitud implica una multiplicitat de significats i possibilitats en constant moviment, és a dir l'infinit és un sistema dinàmic en constant canvi impossible de comprendre. Derrida critica la concepció occidental tradicional de l'infinit com a un conjunt

complet, afirmant que això limita la seva comprensió, ja que per a ell això no era cert. L'infinit és un camp en constant qüestionament.

- Jean-Luc Marion

Jean-Luc Marion és un filòsof francès nascut el 1946. És conegut per les seves contribucions en el camp de la fenomenologia i la filosofia de la religió.



Figura 53: Jean-Luc Marion.

Segons Jean-Luc, l'infinit es revela en l'experiència religiosa i implica la presència de l'absolutament Altres, igual que pensava Levinas. L'infinit no és un concepte abstracte, sinó una realitat viva i relacionat amb l'experiència. Marion argumentava que es podia sintonitzar amb l'infinit quan es prenia consciència de la limitació humana. També pensava que l'infinit es manifestava en moments de pregària, contemplació o trobada amb un altre. L'infinit ajuda a prendre consciència de les limitacions i obre les portes a un coneixement més enllà de la comprensió racional.

2.5. Projeccions futures de l'infinit

Actualment, ja es té molt de coneixement sobre l'infinit i es pot començar a entendre millor comparat amb dècades endarrere. Tot i això, encara continua sent un pou sense final, que té molts aspectes que no es resolten ni s'entenen. Però per a poder entendre l'infinit del tot s'ha de fer pas per pas, i de moment, dins el moviment científic actual els principals problemes que queden pendents per resoldre són principalment donar solució a la hipòtesi del continu proposada per Georg Cantor, a més de trobar més respostes sobre l'univers, i acabar de detallar si és infinit o no. També un dels grans objectius de la humanitat és trobar una font d'energia il·limitada, un altre objectiu relacionat amb l'infinit.

3. MARC PRÀCTIC

Per a dur a terme una part pràctica sobre l'infinit, és necessari que sigui un tema molt concret relacionat amb l'infinit, ja que és impossible trobar una part experimental que abasti tot el que engloba el concepte d'infinit. És per això que s'ha decidit dividir la part pràctica en dues parts que es basen en les fractals, les quals són la part més tangible de l'infinit. La primera és la creació de fractals amb el GeoGebra, i la segona és trobar la dimensió fractal de l'estany de Banyoles i Porqueres.

3.1. Fractals amb GeoGebra

GeoGebra és un programari matemàtic, que permet treballar amb àlgebra, geometria, estadística, fulls de càlcul i molt més. Gràcies al programa s'aconsegueix dur a terme moltes coses, i una d'elles és la creació de fractals. Fa relativament poc, no se'n podien construir a causa que el programari no permetia l'ús de fulls de càlcul, però ara és totalment possible i es poden crear fractals de molts tipus.

Com es crea una fractal?

Per poder construir una fractal s'ha de dibuixar a un pla una iteració infinita de nombres complexos. Els nombres complexos són nombres que estan formats per dues parts: la part real i la part imaginària. Per tant, un nombre complex Z , es podria expressar com a ($z = a + bi$), on "a" i "b" són nombres reals, mentre que "i" és la unitat imaginària que equival a $\sqrt{-1}$. Un exemple de nombre complex podria ser $z = 4 + 3i$. És simplement un nombre format per una part real que seria el 4 i una part imaginària que seria el 3i. Els nombres complexos sorgeixen quan es dona solució a equacions que no tenen solució real, com el cas de la següent:

$$x^2 = -1$$

Aquesta equació donaria com a resultat $\sqrt{-1}$, cosa que no té solució real, per tant, s'ha d'acudir als nombres imaginaris per a poder-la resoldre. I en conseqüència la solució seria $\pm i$.

Per a representar els nombres complexos es pot fer a partir de vectors, és a dir si es vol representar el nombre $z = 4 + 3i$, es pot considerar com al vector $\vec{r} = (4, 3)$, tenint en compte que el primer nombre és real, i el segon imaginari.

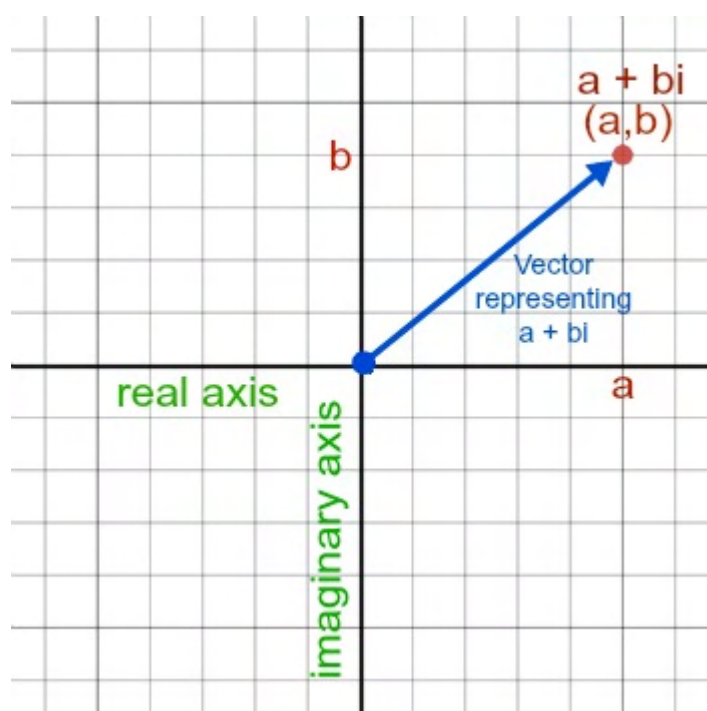


Figura 54: Vector d'un nombre complex.

Per a poder crear una fractal, ara que se sap què és un nombre complex, s'ha de crear una iteració d'aquest nombre per tal que es formin diversos punts en el pla i es creï la fractal. Una iteració en matemàtiques és repetir un procés (operació matemàtica) diversos cops per a arribar a una meta. Per posar un exemple, una iteració seria agafar el nombre 2, i multiplicar-lo per 4 i sumar-li 3, en el resultat donat es torna a multiplicar 4 i se li suma 3, i aquest procés repetir-lo les vegades que es cregui convenient. Si se li apliqués una iteració infinita a un nombre complex naixeria una fractal, i depenent de l'operació matemàtica que se li apliqui en poden sorgir de molts tipus i formes diferents.

3.1.1. Creació pas per pas

- El primer pas és obrir el GeoGebra i prémer l'enllaç que diu "GeoGebra Clàssic", i s'obrirà un full de treball. En el full apareix una icona on s'ha de fer clic.

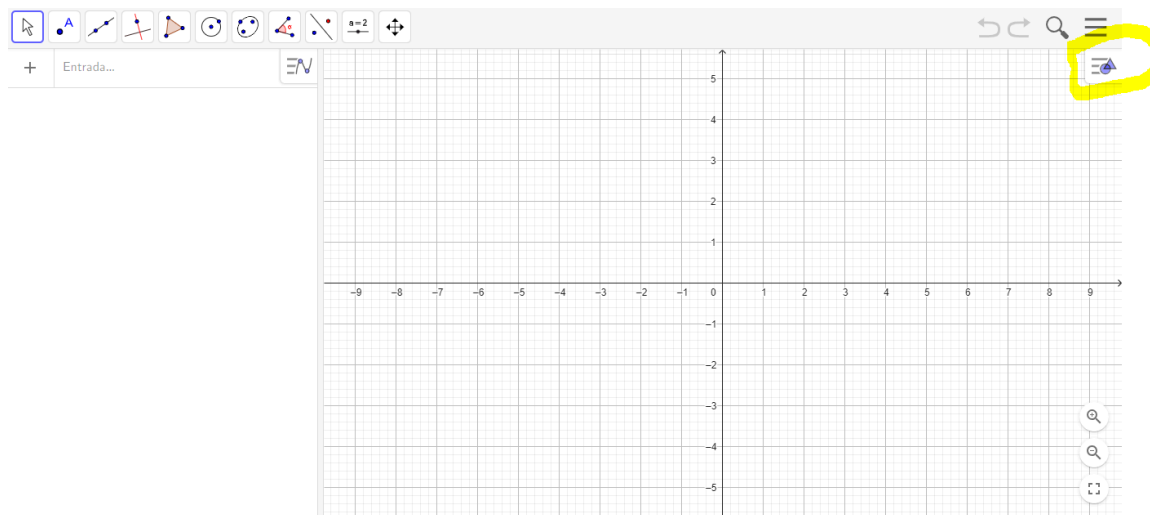


Figura 55: Barra d'eines.

- Un cop clicat, s'obre un barra d'opcions i s'ha de clicar els tres puntets. Després apareixeran diverses opcions i s'ha de prémer l'opció de "full de càlcul".

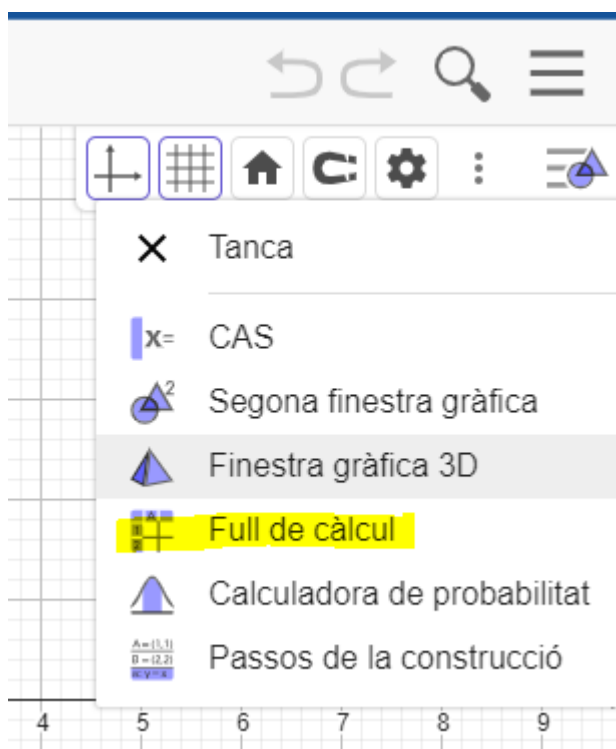


Figura 56: Selecció del full de càlcul.

- S'obrirà el full de càlcul, i ja es podrà començar a treballar a crear la fractal. Primer s'ha d'escriure el nombre 0 a la casella A1, i seguidament a la casella de sota s'ha d'escriure el símbol "=", i clicar la casella A1 la qual quedarà guardada, i s'hi ha de sumar 1 per tal que el nombre de baix sigui una unitat més gran que el de dalt.

Aquesta programació s'ha de copiar fins a la casella A121. Per tal que la columna A, tingui els nombres del 0 al 120. Per fer-ho tot de cop i no haver d'escriure nombre per nombre, s'ha de clicar la casella A2, i apareixerà un quadradet blau, el qual s'ha d'arrossegar avall fins a arribar a la casella A121. 120 serà el nombre de punts que hi haurà a l'eix d'ordenades. Per tal que la fractal quedi més completa, aquest nombre hauria de ser molt més gran, però en el cas de fer-ho més gran es necessitaria un ordinador molt potent per poder processar tanta informació.

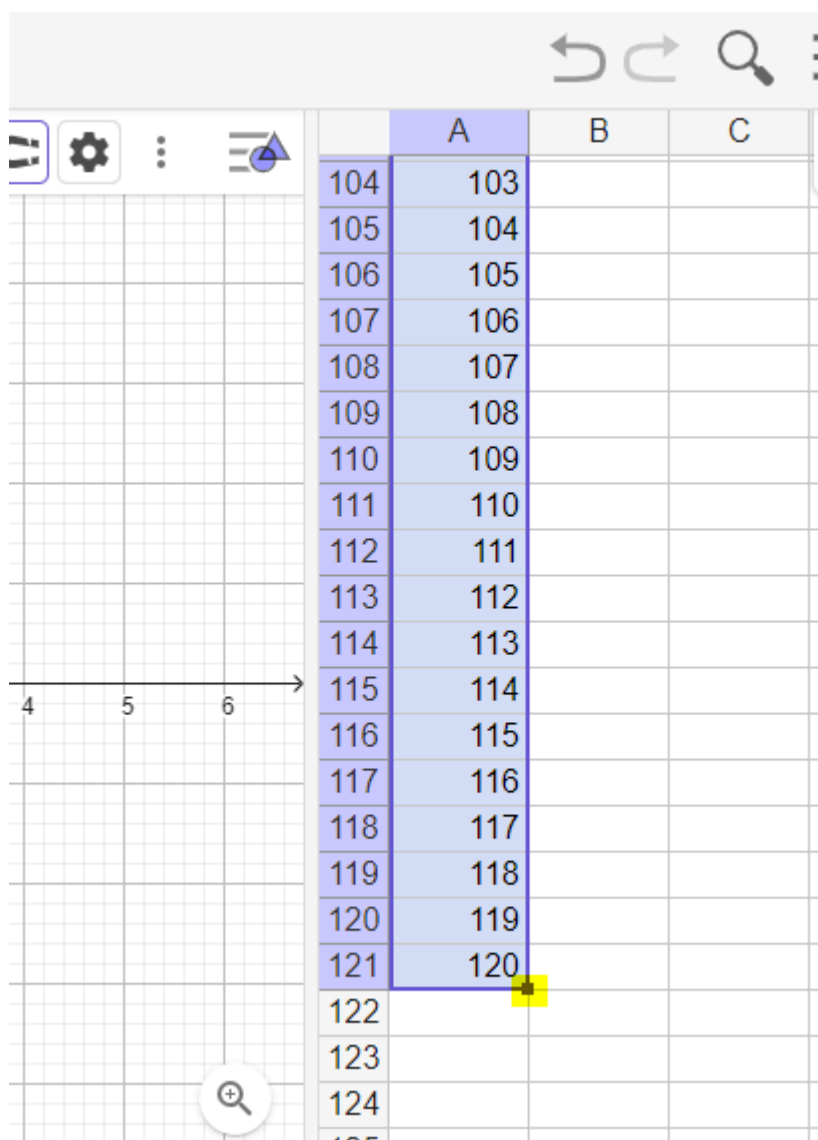


Figura 57: Numeració de caselles.

- Seguidament, a la columna B, s'haurà d'escriure el nombre complex. Per tal de limitar la fractal en un rectangle i poder-lo observar, s'ha de crear una variable t , que es pot crear utilitzant l'eina "punt lliscant", que apareix a la barra d'eines. Aquesta permet crear una variable que canvia de valor depenent de com es llisqui el punt.

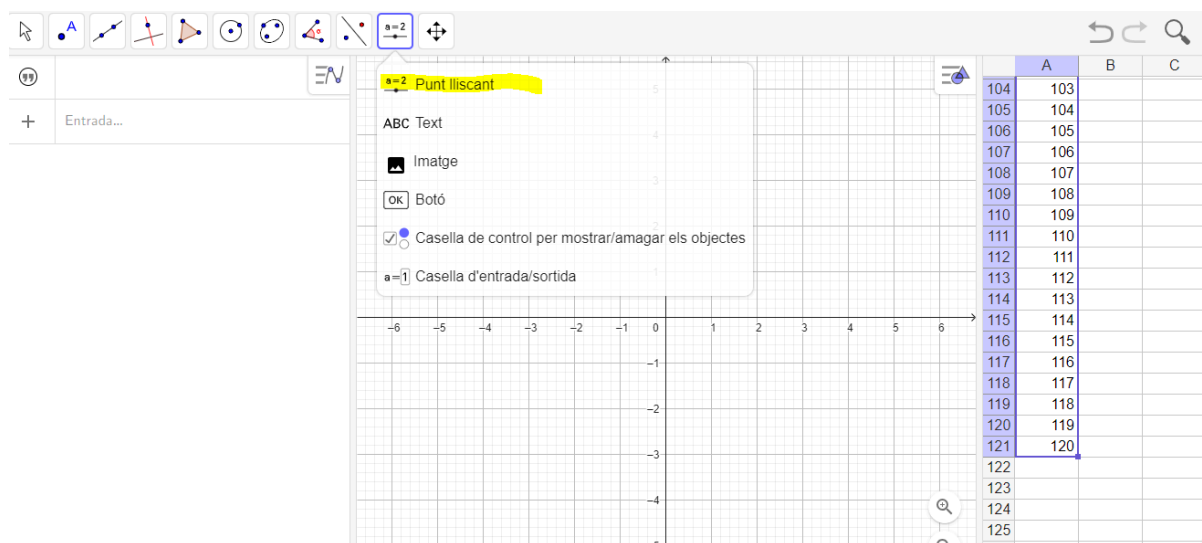


Figura 58: Selecció del punt lliscant.

- Un cop clicada l'eina i seguidament el pla de coordenades, sortiran unes opcions. On diu nom s'ha de posar "t", que és amb el nom amb el qual es treballarà, tot i que podria ser qualsevol altra lletra. On posa mínim s'ha de posar "-2", i on posa màxim s'ha de posar "2", per tal de limitar la fractal entre -2 i 2 en l'eix de les abscisses. On posa increment s'ha de posar "0.001", ja que és de la manera en què incrementarà el nombre. Per fer una fractal perfecta, aquesta oscil·lació hauria de ser infinitament petita, però com s'ha dit, l'ordinador no ho podria processar. Es clica d'acord i s'observarà una barra en el pla.

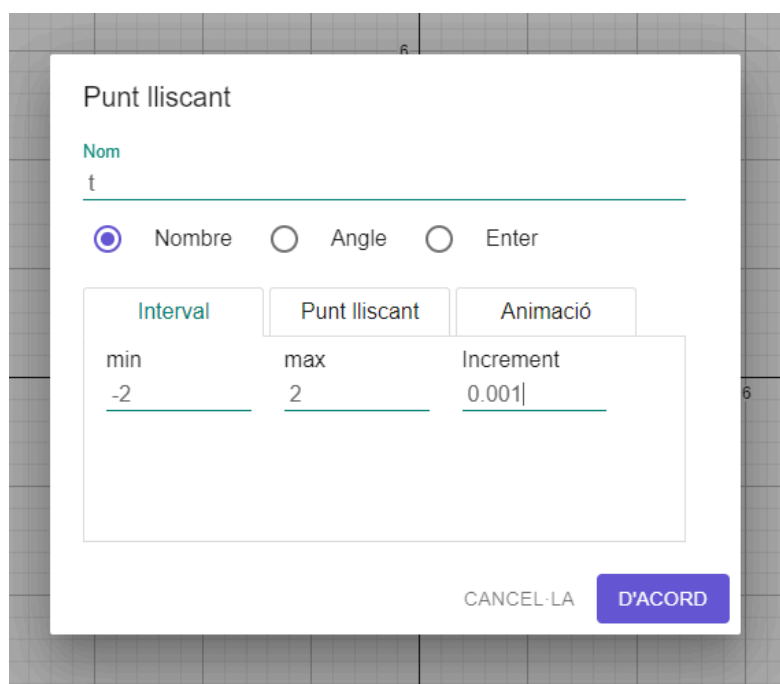


Figura 59: Configuració del punt lliscant.

- Seguidament, s'ha de clicar la casella B1, i s'hi ha d'escriure el següent: $= (t, A1/120)$. Això representa un punt al pla.

D'aquesta manera apareixeran 120 punts, on la X dependrà de la t, i Y seran els 120 punts que es repartiran entre el 0 i l'1 en l'eix de les Y, ja que s'ha programat que cada casella de la columna A, s'ha de dividir entre 120, per tant, com que hi ha valors fins al nombre 120, a l'eix de les Y no hi haurà nombres superiors a 1. Aquesta programació s'ha de copiar fins a la casella B121, com s'ha fet anteriorment per a la columna A. Un cop fet això es completaran totes les caselles, i tindran el mateix valor de X, però diferent valor de Y. El problema és que encara no són nombres complexos. Per a aconseguir-ho s'ha de fer clic a la casella "B" per tal de seleccionar tota la columna i després fer-hi clic dret. Sortirà una barra d'opcions i s'ha de clicar " propietats", apareixerà una barra i s'ha de prémer "Àlgebra". Seguidament, on diu "Coordenades cartesianes" s'ha de canviar per a "Nombre complex", d'aquesta manera, tota la columna canviarà i es crearan nombres complexos. També un cop seleccionada la columna, s'ha de clicar un altre cop " propietats" i "Bàsic", on s'ha d'activar l'opció "activa traç" i "Mostra objecte".

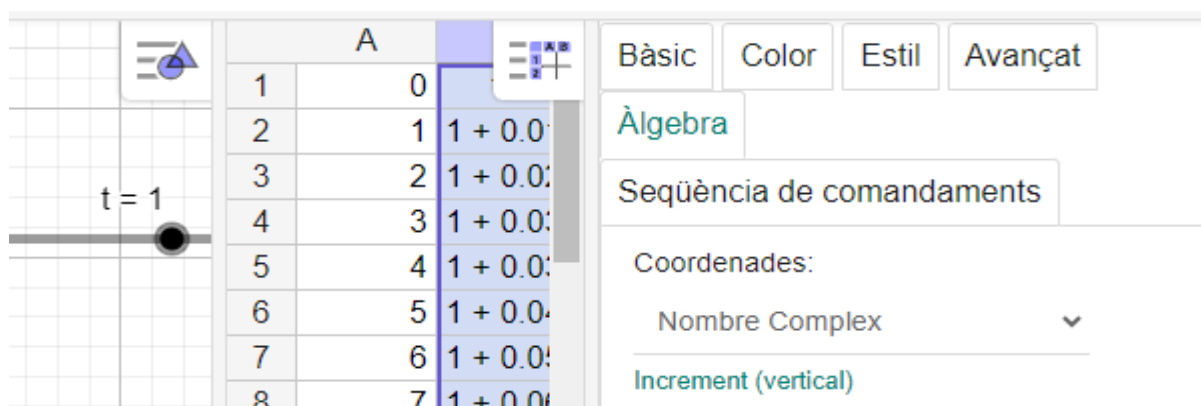


Figura 60: Configuració de la columna B.

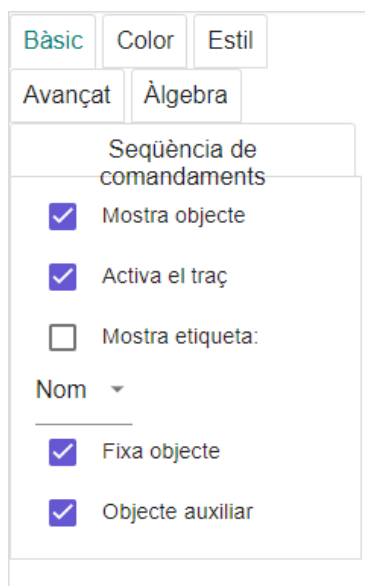
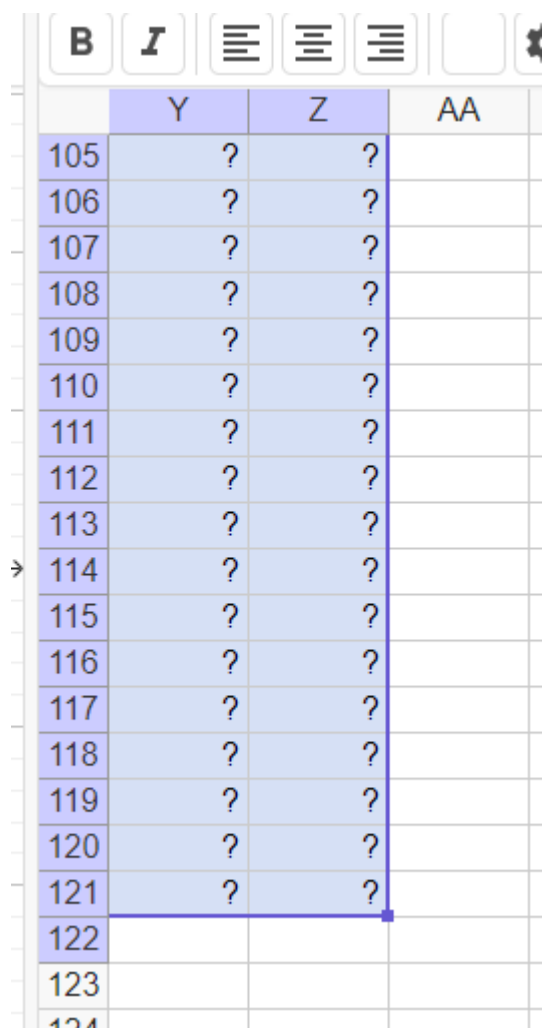


Figura 61: Configuració de la columna.

- Per a fer la iteració s'ha d'acudir a la columna C. S'ha de clicar la casella C1, i escriure el següent: $=B1^2+SB1$

Aquesta operació és necessària per a crear la fractal, en concret aquesta operació crea la fractal de Mandelbrot, però es podria fer qualsevol operació matemàtica i sortirien fractals diferents. Novament, la programació s'ha d'arrossegar, però aquest cop horitzontalment fins a arribar a la Z, que és les vegades que s'itera el nombre complex. També, es podria anar molt més lluny per donar més detall la fractal, però com s'ha dit un altre cop es necessita un millor ordinador. Seguidament, sense deixar de seleccionar res, és a dir, amb tota la barra de C1 fins a Z1 seleccionada, s'ha d'anar a la Z i allà apareixerà un quadradet blau, el qual s'ha d'arrossegar cap a baix fins a arribar al 121.



	Y	Z	AA
105	?	?	
106	?	?	
107	?	?	
108	?	?	
109	?	?	
110	?	?	
111	?	?	
112	?	?	
113	?	?	
114	?	?	
115	?	?	
116	?	?	
117	?	?	
118	?	?	
119	?	?	
120	?	?	
121	?	?	
122			
123			
124			

Figura 62: Selecció de totes les caselles.

- En aquest punt ja es té la fractal descrita, però només hi ha una meitat, ja que per a completar la fractal s'ha de crear una simetria en el pla. Per a aconseguir-ho s'ha d'anar a la casella AA1, i escriure el següent: $= (t, -A1/120)$
 Seguidament, s'ha d'arrossegar cap avall fins a la casella AA121, i finalment s'ha de seleccionar tota la columna i com a la columna B, convertir-ho tot en nombres complexos. A més que també s'ha d'activar el traç. En aquest cas s'ha aplicat la mateixa fórmula que la columna A, però canviant la X de signe, per tal que aparegui la mateixa imatge però en l'eix negatiu, amb efecte mirall.

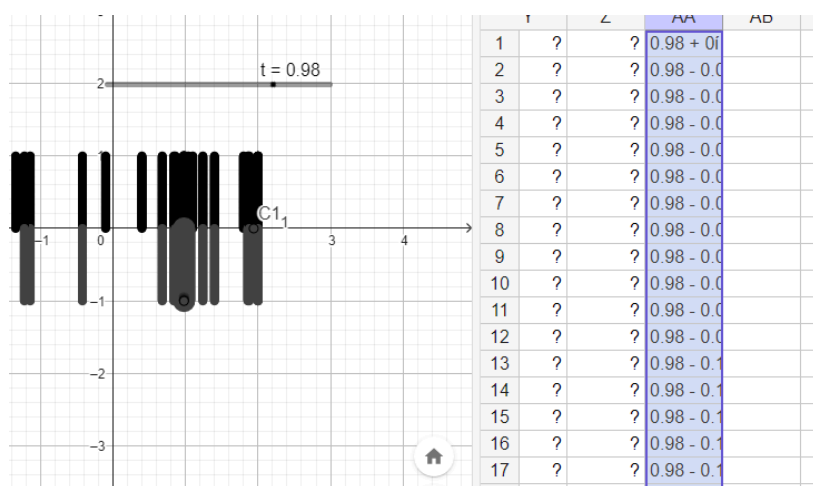


Figura 63: Repetició a l'eix negatiu.

- Finalment, s'ha de donar color a la fractal, i per a fer-ho s'ha de seleccionar la casella B1, fer clic dret i prémer “propietats” i seguidament prémer “avançat”. A la part on diu vermell s'ha d'escriure “ $e^{\text{Longitud}(Z1)}$ ” a la part on diu Verd “ $(1+e^{\text{Longitud}(Z1)^2})/2$ ” i a la part on diu Blau “ $(1+e^{\text{Longitud}(Z1)})/2$ ”. Aquest comando és per a canviar el color del punt depenent de la longitud del nombre complex. Es tanca la pestanya i finalment en el quadradet blau de la casella s'ha d'arrossegat fins a baix. Això també s'ha de fer a la casella AA1. També s'ha de canviar la grandària dels punts, per tal que es vegi la fractal amb més detall, clicant tota la columna B i A, es va a “propietats”, “Estil”, i es baixa la mida fins a 1.

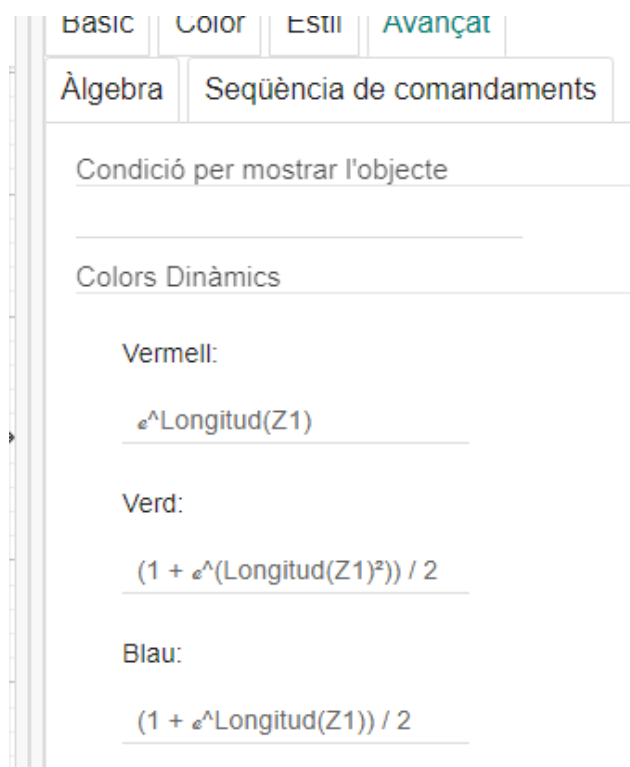


Figura 64: Configuració del color.

- Per finalitzar, s'ha de prémer clic dret a la barra de la variable t , i clicar “animació”. D'aquesta manera el valor t anirà oscil·lat i s'anirà dibuixant la fractal. Aquest procés pot tardar molt o poc depenent de la potència de l'ordinador.

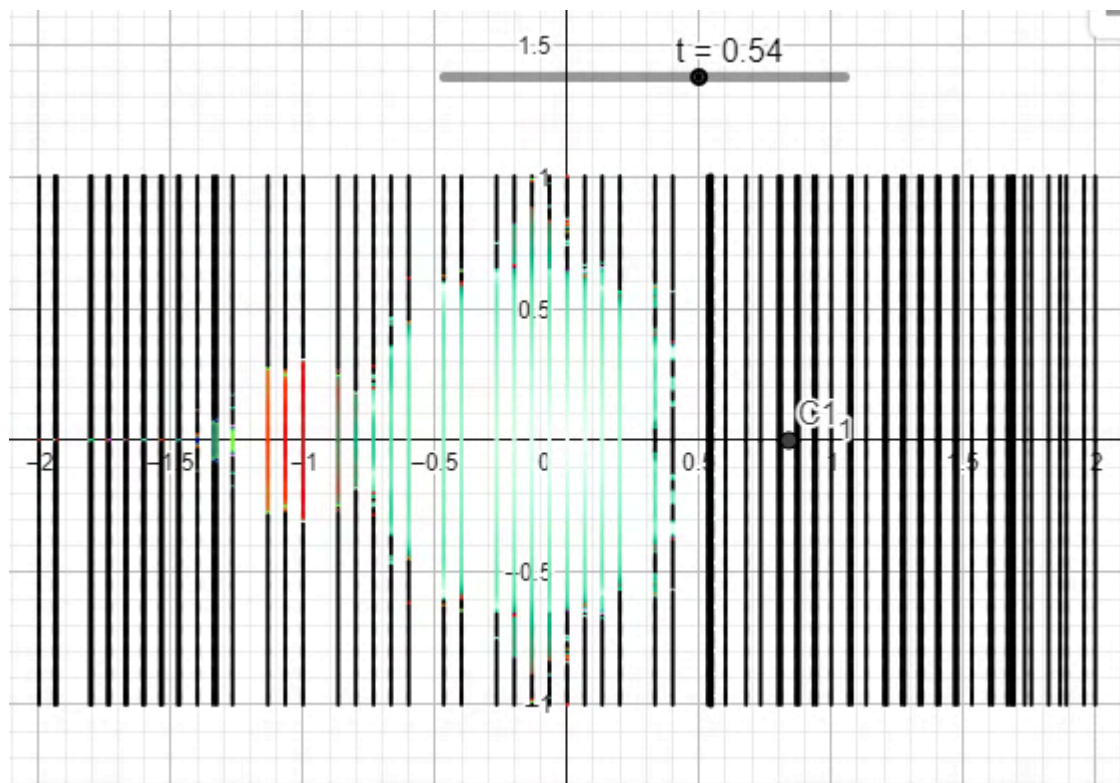


Figura 65: Creació de la fractal.

❖ El resultat final:

3.1.2. Fractal de Mandelbrot

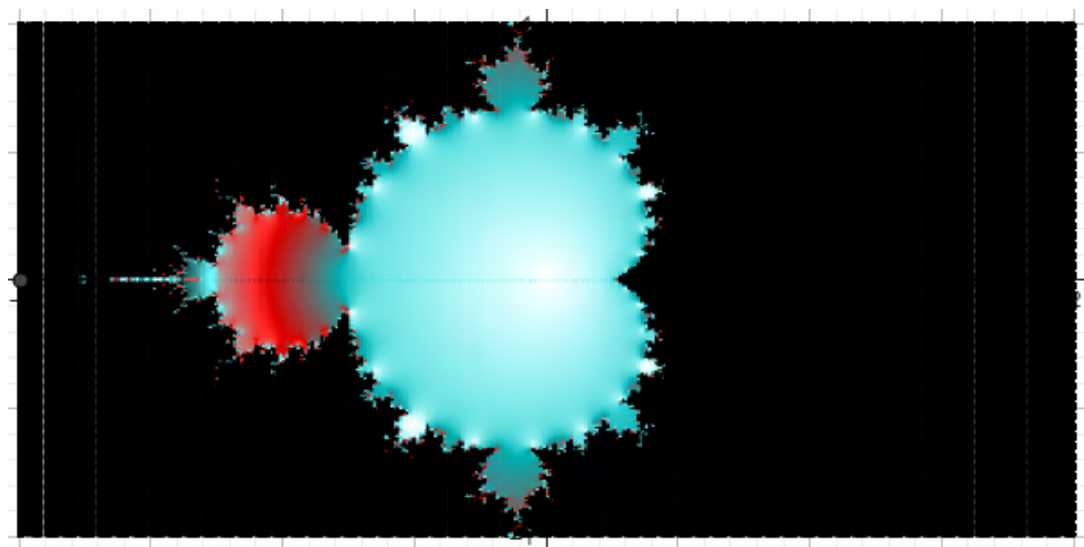


Figura 66: Fractal de Mandelbrot creada.

Aquest és la fractal de Mandelbrot, una de les més famoses i conegudes, ja que té una forma molt completa i definida, a més que és una de les primeres fractals extretes d'un nombre complex.

3.1.3. Fractal Cosinus

També s'ha decidit intentar crear una fractal pròpia que no s'hagi creat anteriorment o almenys que se n'hagi parlat poc. Per crear la meua fractal, com a iteració s'ha utilitzat la funció "cosinus", i en el pas de crear la iteració a la casella C1 (mencionat anteriorment) s'ha escrit el següent: $= \cos(B1) + \&B1$

És simplement escriure els cosinus del nombre complex, i sumar-li el mateix nombre complex.

D'aquesta manera, seguint de la mateixa forma tots els passos mencionats, ha nascut la següent fractal.

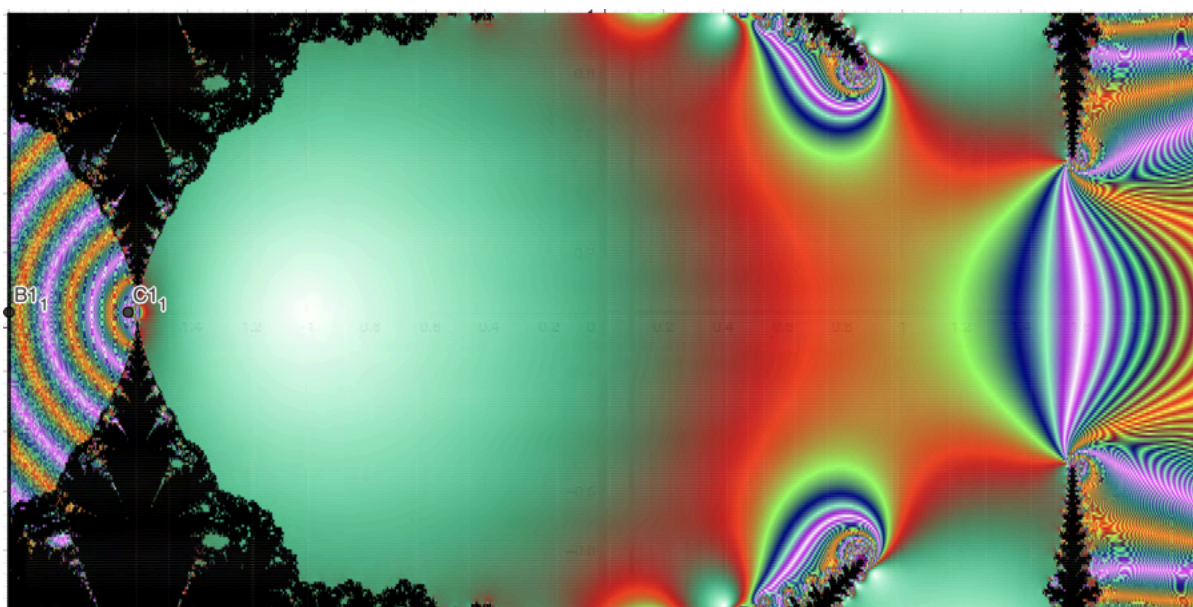


Figura 67: Fractal cosinus.

Aquesta fractal és molt més acolorida i s'hi poden veure moltes més irregularitats que a la fractal de Mandelbrot, però no es veu tan definida, ja que segurament té un domini més gran, però no s'ha definit a l'hora de decidir fins a on es vol dibuixar la fractal. Pel fet que, com he dit abans, només s'ha dibuixat la fractal en l'interval $(-2,2)$, en l'eix de les X, i entre l'interval $(1,-1)$ en l'eix de les Y. Per tant, probablement si no s'hagués acotat tant l'àrea, segurament s'hauria pogut veure més d'aquesta fractal. Però no ha estat possible, pel fet que si es definís més, l'ordinador tardaria molt a dibuixar els punts, és per això que ha estat necessari acotar-ho en cada fractal creada.

3.1.4. Fractal Sinus

També s'ha provat de crear-ne una amb la funció sinus. Amb la iteració següent: $= \sin(B1) + B1$

De la mateixa manera que l'anterior, aquesta iteració tracta de fer els sinus del nombre complex i sumar-li el mateix nombre complex.

Ha sorgit la següent fractal:

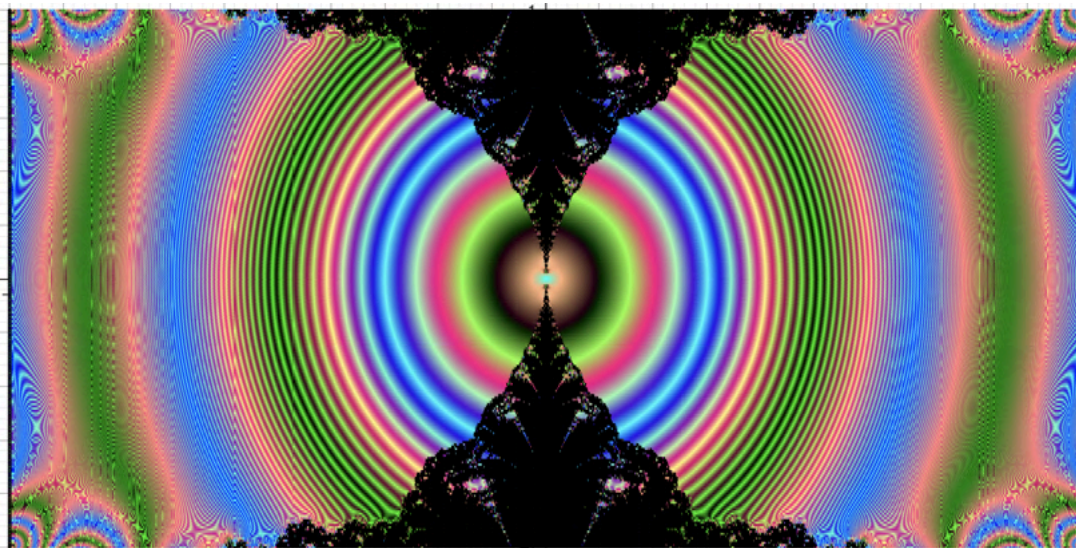


Figura 68: Fractal sinus.

És molt similar a la fractal dels cosinus, ja que té la mateixa forma, però té una diferent orientació, i colors. També es pot veure que si s'hagués definit la fractal en una àrea molt més gran segurament es veuria molt més d'aquesta fractal.

3.1.5. Fractals de creació pròpia

Una altra fractal que s'ha provat és la següent: $= B1^3/e + B1$.

En aquest cas s'ha elevat el nombre complex al cub, i seguidament s'ha dividit entre el nombre "e". Finalment, se li ha sumat el mateix nombre complex.

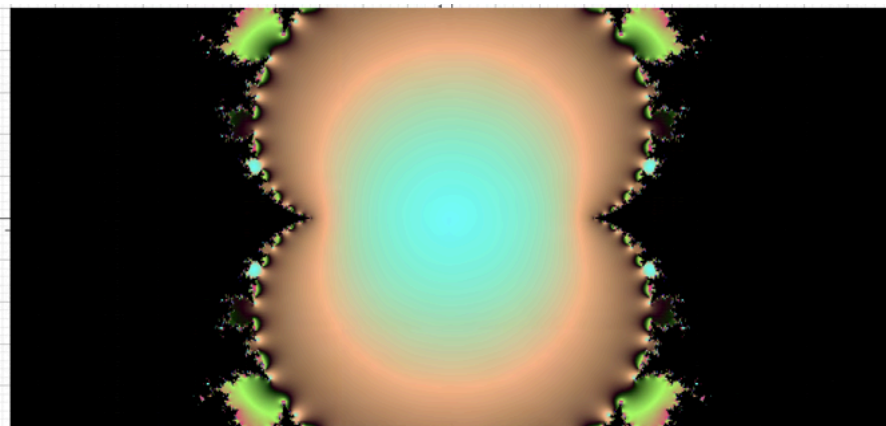


Figura 69: Fractal de creació pròpia.

En aquest cas la fractal obtinguda és molt semblant a la fractal de Mandelbrot, ja que les operacions que s'utilitzen a la iteració són molt similars, i el que es pot observar és que sorgeix la fractal de Mandelbrot, però com si es veiés en un mirall, és a dir és simètric tant a l'eix de les y com a l'eix de les x .

Per acabar, s'ha provat la següent iteració: $= B1^3/(e+B1)$

És molt semblant a la iteració anterior, però en aquest cas la suma està en el denominador, per tant, el que s'ha fet és elevar el nombre complex al cub, i dividir-ho entre la suma entre el nombre "e" i el nombre complex.

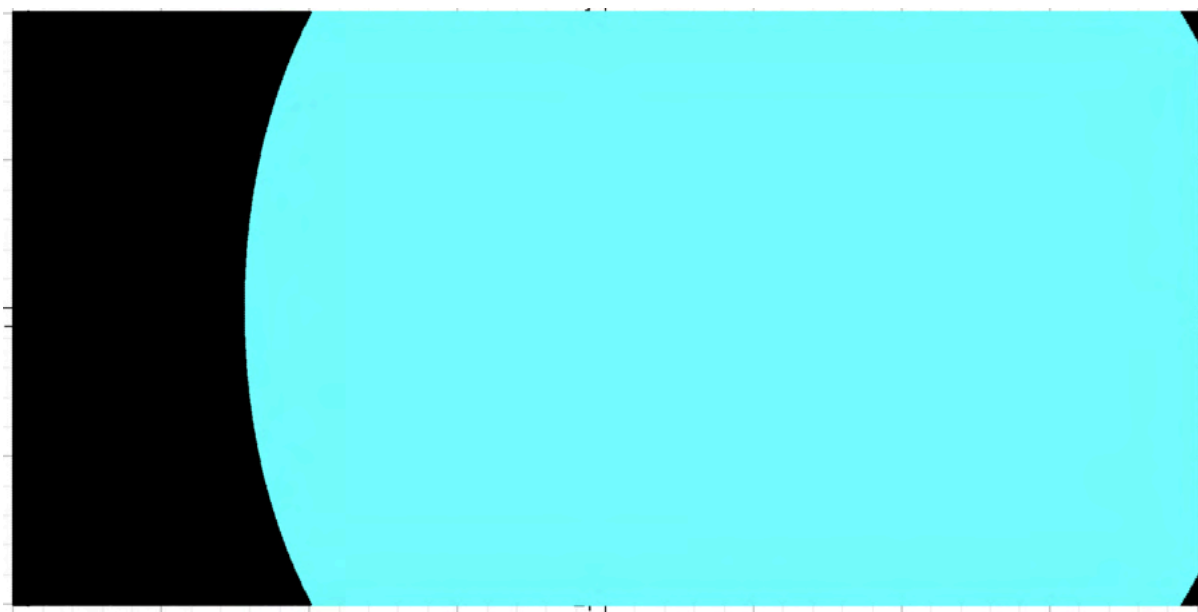


Figura 70: Fractal de creació pròpia.

En aquest cas no es pot intuir com a una fractal, ja que amb la resolució de l'ordinador i l'acotació dels resultats en el rectangle amb punts en l'eix de les abscisses entre -2 i 2, la fractal no es visualitza correctament. S'intueix una corba molt arrodonida, que tendeix a una circumferència o una el·lipse. Segurament si no s'hagués acotat tant l'àrea probablement es veurien més parts de la fractal que ara queden amagades.

3.2. Dimensió fractal de l'estany de Banyoles

Les fractals són formes geomètriques amb propietats molt especials, de les quals la més important és que no tenen una dimensió entera, sinó que tenen dimensions fraccionàries amb un valor o un altre depenent del tipus de fractal. En el cas de les costes irregulars tant marines com de llacs o estanys, es troben fractals, és a dir que depenent de l'escala on es mesuri el perímetre de la costa, dona valors més grans o més petits. Un exemple és la costa de Gran Bretanya. Benoît Mandelbrot, l'any 1967 va fer un estudi de la dimensió fractal de la costa britànica, i es va veure que si es mesurava des de molt lluny donava un valor, però, en canvi, si es mesurava de més a prop, com que hi ha irregularitats que a una escala molt llunyana no s'apreciava, no es tenia en compte, i per tant el segon perímetre donava un valor major comparat amb el primer cop. El mètode que es va fer servir per a calcular-la, és un molt semblant al que s'utilitzarà en la segona manera de calcular la dimensió fractal de l'estany.

La dimensió fractal es pot calcular gràcies a la fórmula que, segons Fèlix Hausdorff, no només permet calcular la dimensió de fractals, sinó que també calcula la dimensió de figures geomètriques corrents:

$$D = \log N / \log S$$

D: dimensió fractal

N: quocient entre el nombre d'unitats necessàries per cobrir la costa en escala petita i en escala gran.

S: quocient entre escales (escala gran entre escala petita, tenint de referència una mateixa unitat)

Ja amb tota aquesta informació, es pot calcular la dimensió fractal de l'estany de Banyoles. S'ha calculat la dimensió fractal de l'estany mitjançant dos mètodes diferents, per tal de comparar-los i veure quin és més eficaç i precís.

3.2.1. Dimensió fractal de l'estany mitjançant Google Earth

Una manera per calcular la dimensió fractal és mesurar el perímetre de l'estany a diferents escales, mitjançant l'eina de Google Earth que et permet mesurar la distància que marques amb el ratolí. El mateix programa permet veure l'escala en la qual et trobes, i es pot

modificar si s'amplia o s'empetiteix la imatge, per tant, és molt senzill després calcular la dimensió fractal.

Primerament, s'ha mesurat el perímetre a quatre escales diferents, i per a cada escala s'ha mesurat tres cops per a minimitzar l'error. Aquestes mesures es van fer resseguint el perímetre de l'estany amb l'eina de Google Earth, el màxim precís possible. Amb les tres mesures es va fer una mitjana, que és la que servirà per al càlcul de la dimensió fractal.

La primera es va fer a una escala de 90 metres, va donar un perímetre de 7525,307 metres. La segona mesura es va fer a una escala de 200 metres, i va sortir el perímetre de 6406,620 metres. En tercer lloc, es va mesurar a una escala de 400 metres, i va resultar un perímetre de mitjana de 6341,303 metres. Finalment, es va mesurar amb una escala de 1000 metres i van sortir 6013,904 metres de perímetre. Es pot observar que com més petita és l'escala, és a dir, com de més a prop es mesura, més gran és el perímetre.



Figura 71: Perímetre de l'estany.

Un cop es tenen els resultats l'únic problema és que la fórmula de la dimensió fractal només es pot completar si es tenen el nombre d'unitats per cobrir el perímetre l'estany, i no el perímetre. Per tant, s'ha de passar el perímetre en nombre d'unitats, i això és possible gràcies al fet que totes les escales tenen com a referència la mateixa distància en escala no real.

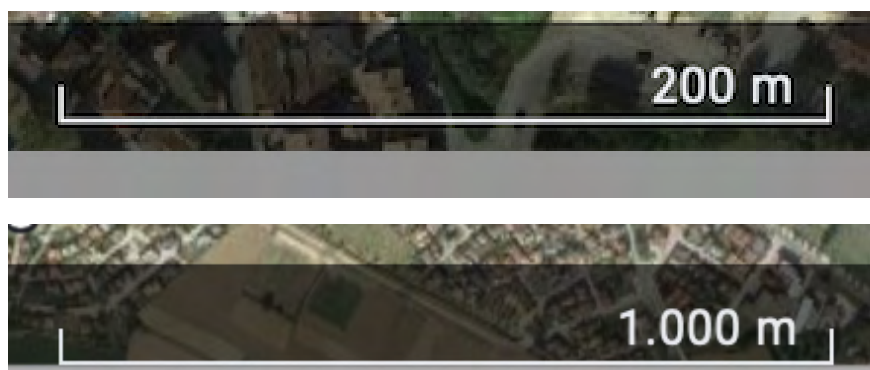


Figura 72: Referència de les escales.

Es pot veure que quan es mesurava el perímetre de l'estany les escales eren diferents, però tenien com a referència una longitud igual en l'escala no real.

Per tant, per a passar el perímetre en unitats simplement s'ha de dividir el perímetre entre l'escala en què s'ha mesurat. Els resultats són els següents:

Escala(m)	L1	L2	L3	Mitjana L	Unitats
90,000	7544,490	7498,830	7532,600	7525,307	83,615
200,000	6403,840	6420,320	6395,700	6406,620	32,033
400,000	6351,250	6318,540	6354,120	6341,303	15,853
1000,000	6017,630	6003,430	6020,760	6013,940	6,014

Figura 73: Càlcul de les unitats del perímetre.

Seguidament, s'ha de completar la fórmula, en conseqüència, s'ha de dividir una longitud en unitats feta a escala petita entre una que s'ha mesurat a escala més gran. Amb només dues mesures seria suficient, ja que la fórmula només està feta per a dues mesures, però per a disminuir errors i obtenir un resultat més apropiat a la realitat s'han de fer diversos càlculs de dimensió fractal amb mesures diferents i després fer-ne una mitjana. Com s'ha dit, per a donar més precisió al resultat es calcula amb totes les combinacions possibles. El càlcul dona els resultats següents:

Escales	L	I	N(I/L)
1000-90	6,014	83,615	13,903
1000-200	6,014	32,033	5,326
1000-400	6,014	15,853	2,636
400-200	15,853	32,033	2,021
400-90	15,853	83,615	5,274
200-90	32,033	83,615	2,610

Figura 74: Càlcul de la "N".

En segon lloc, s'ha de calcular la raó entre una escala i una altra escala més petita:

M	m	S(M/m)
1000,000	90,000	11,111
1000,000	200,000	5,000
1000,000	400,000	2,500
400,000	200,000	2,000
400,000	90,000	4,444
200,000	90,000	2,222

Figura 75: Càlcul de la "S".

Per acabar s'ha de calcular el logaritme de la primera raó (N) i dividir-ho entre el logaritme de la segona raó (S). El resultat és la dimensió fractal, i en aquest cas se n'han calculat varies i se n'ha fet una mitjana.

Tots els càlculs ja fets:

Càlcul:							
Escala	L	I	N(I/L)	M	m	S(M/m)	Dimensió fractal = $\log N / \log S$
1000-90	6,014	83,615	13,903	1000,000	90,000	11,111	1,093
1000-200	6,014	32,033	5,326	1000,000	200,000	5,000	1,039
1000-400	6,014	15,853	2,636	1000,000	400,000	2,500	1,058
400-200	15,853	32,033	2,021	400,000	200,000	2,000	1,015
400-90	15,853	83,615	5,274	400,000	90,000	4,444	1,115
200-90	32,033	83,615	2,610	200,000	90,000	2,222	1,202
							1,087

Figura 76: Càlcul de la dimensió fractal.

Com a resultat ha donat que la dimensió fractal de l'estany de Banyoles és d'1,087. És un nombre molt pròxim a 1, i per tant no és gaire acurat al que realment hauria de donar, però és normal, ja que durant la pràctica hi ha hagut molts errors mesurant el contorn de l'estany, perquè s'ha fet a ull; a més, des de Google Earth no es podia veure gaire bé el contorn en les zones on hi havia ombres i molta vegetació.

És per això que s'ha repetit el càlcul de la dimensió fractal de l'estany mitjançant un altre mètode molt més precís.

3.2.2. Càlcul de la dimensió fractal de l'estany mitjançant un programa informàtic

En aquest cas s'ha calculat la dimensió fractal de l'estany de Banyoles a través d'un programa informàtic fet amb "Python" creat per a l'enginyer Albert Casals, del programa de suport XEC3. Però per a arribar a poder calcular la dimensió amb el programa primerament s'ha hagut de passar el perímetre de l'estany a una funció matemàtica.

Per a passar l'estany a una funció el que s'ha hagut de fer és traçar una línia transversal de punta a punta de l'estany la qual és la que marcarà l'eix de les abscisses. Per fer això es va haver d'imprimir una fotografia del perímetre de l'estany de Banyoles en un full A3. En aquest s'hi va traçar una línia amb regla, d'uns 38 cm. Seguidament, el que es va fer és marcar cada mil·límetre de la línia, per a així poder traçar unes línies perpendiculars a l'eix de les abscisses que vagin de la línia marcada a un punt del perímetre de l'estany.

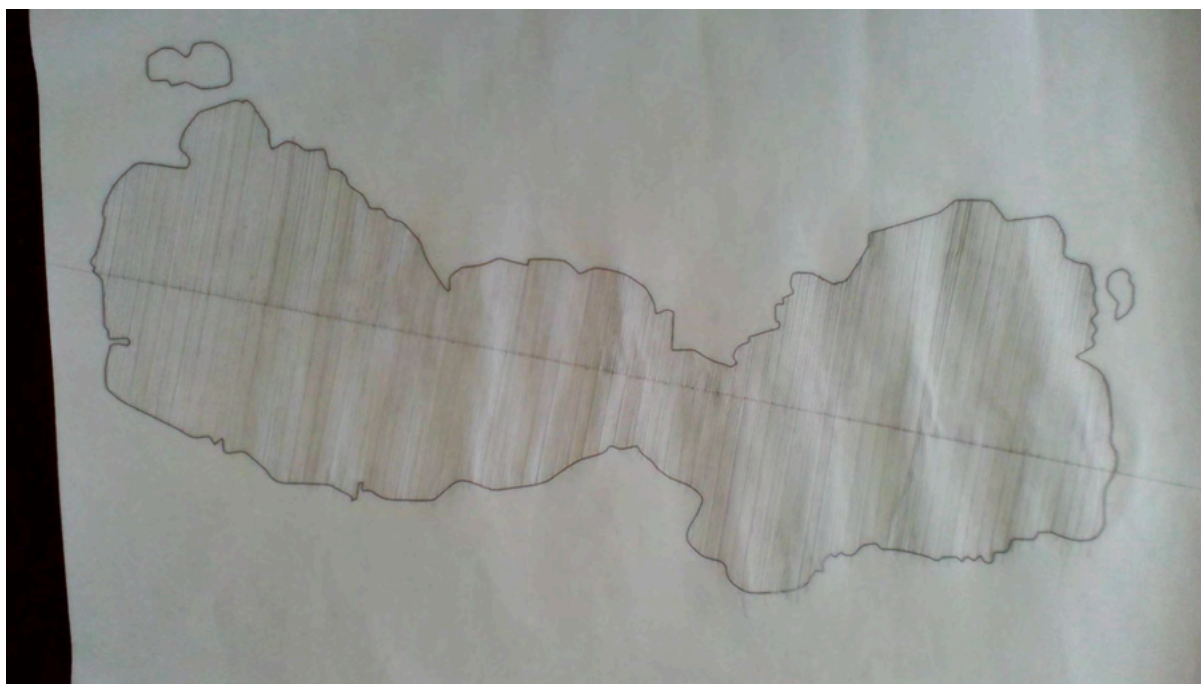


Figura 77: Mesures de l'estany de Banyoles

En aquest cas es va situar el punt (0,0) en el punt de més a l'esquerra. En un full de calc s'hi va escriure cada mil·límetre que es va marcar de l'eix de les abscisses en una columna (de l'1 al 380), i en la columna del costat, s'hi va escriure la imatge (Y) corresponent, que és la distància entre l'eix (x) i el perímetre de l'estany. Per tant, es va haver de mesurar cada una de les 760 línies, ja que en aquest cas cada antiimatge (X) té dues imatges (Y): la positiva, que defineix la silueta de la part de dalt de la línia, i la imatge negativa que defineix la silueta de la part de baix.

El perímetre de l'estany passat a funció és el següent:

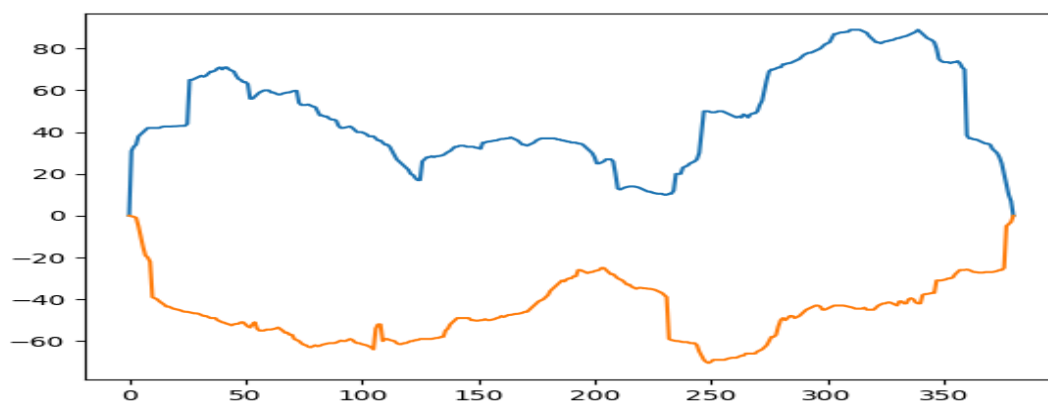


Figura 78: Estany passat a funció matemàtica.

El programa informàtic:

El que fa aquest programa informàtic dissenyat per a l'enginyer Albert Casals és trobar la dimensió fractal a partir d'una funció matemàtica, basant-se en la fórmula de la dimensió fractal esmentada anteriorment. Aquesta fórmula matemàtica es pot traduir per tal de poder operar amb ella sense necessitat d'utilitzar escales ni trobar perímetres. Es pot fer si es posa una quadrícula a la imatge i es mira quins quadrats tenen funció a dins. En aquest cas s'ha de substituir la "N" de la fórmula pel nombre de quadrats que s'usen, en l'eix de les x, és a dir, la base de la quadrícula. La "S" s'ha de substituir pel nombre de quadrats que tenen funció a dins. D'aquesta manera ja se'n pot treure la dimensió fractal. Però per poder-ho fer precis, s'ha de fer diverses vegades amb un nombre de quadrats de base cada vegada més gran i fer-ne una mitjana. La repetició del procés s'anomena iterar. En l'estudi de la dimensió de Gran Bretanya es va fer el mateix procediment, però en comptes de quadrats es van fer servir cercles.

Primerament, el programa ha estat provat en funcions més senzilles:

Funció lineal:

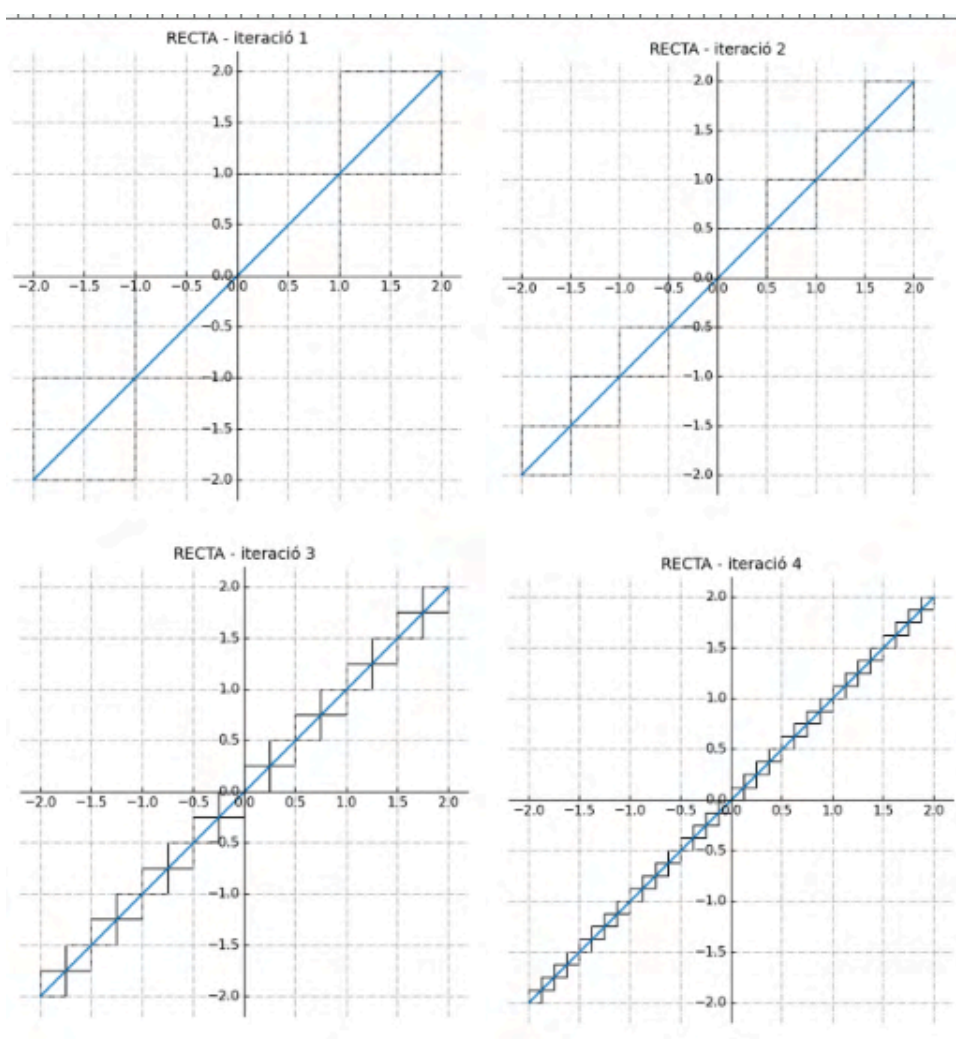


Figura 79: Dimensió fractal d'una recta.

Aquesta funció dona com a dimensió fractal 1 en cada una de les iteracions, per tant, la mitjana dona 1. Això vol dir que no té dimensió fractal, sinó que la recta o funció lineal només té una dimensió. Es pot veure que el nombre de quadrats que tenen funció a dins i el nombre de quadradets a la base de la quadrícula coincideixen. Els logaritmes donen igual, per tant, la divisió dona 1.

Funció sinus:

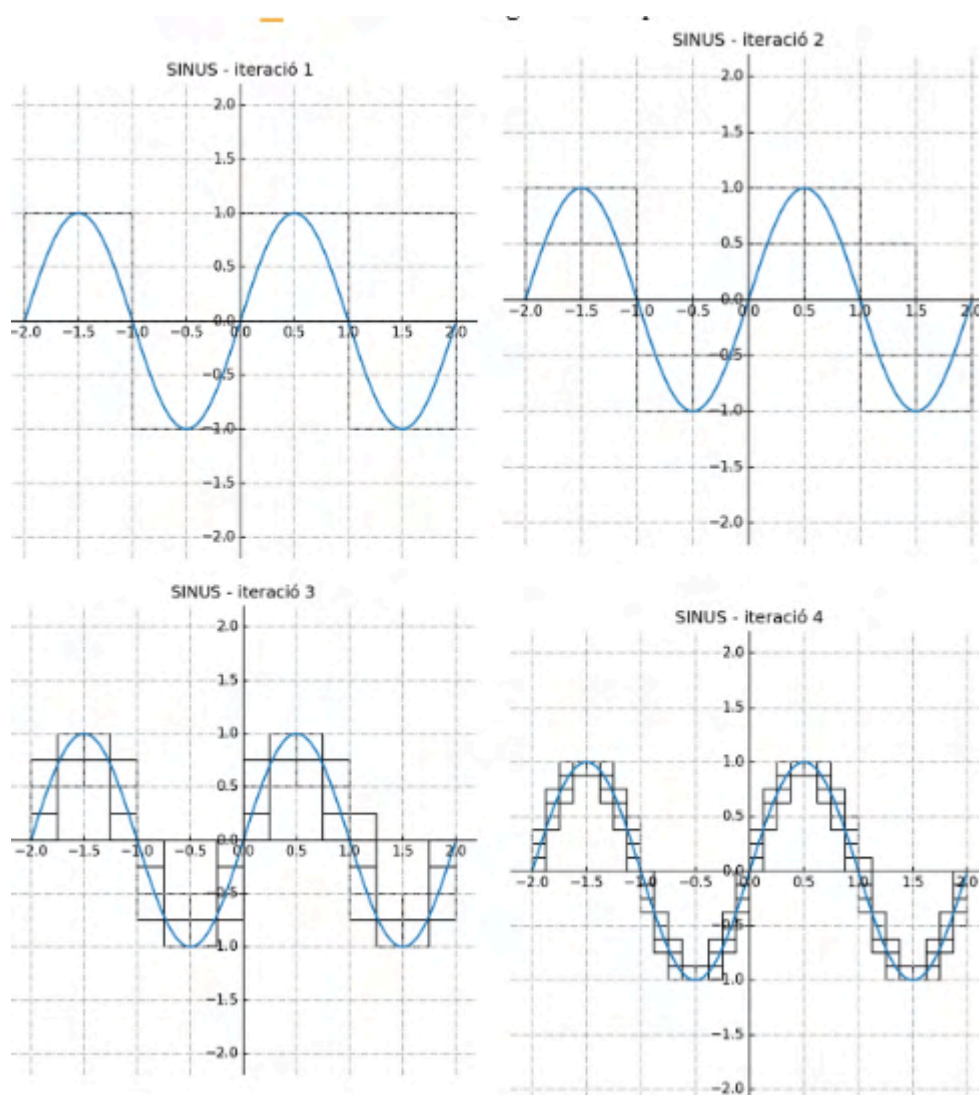


Figura 80: Dimensió fractal de la gràfica sinus.

Aquesta funció és més irregular que la recta, i la mitjana dels quatre resultats dona una dimensió fractal d'1,21, un valor superior a 1. Tot i això, si es repetís el procés amb més quadradets cada cop més petit, es veuria que el valor s'acostaria cada vegada més a 1 pel fet que la funció sinus no és una fractal. Per tant, el valor obtingut no és molt exacte simplement perquè falta repetir el procés més vegades.

Funció parabòlica:

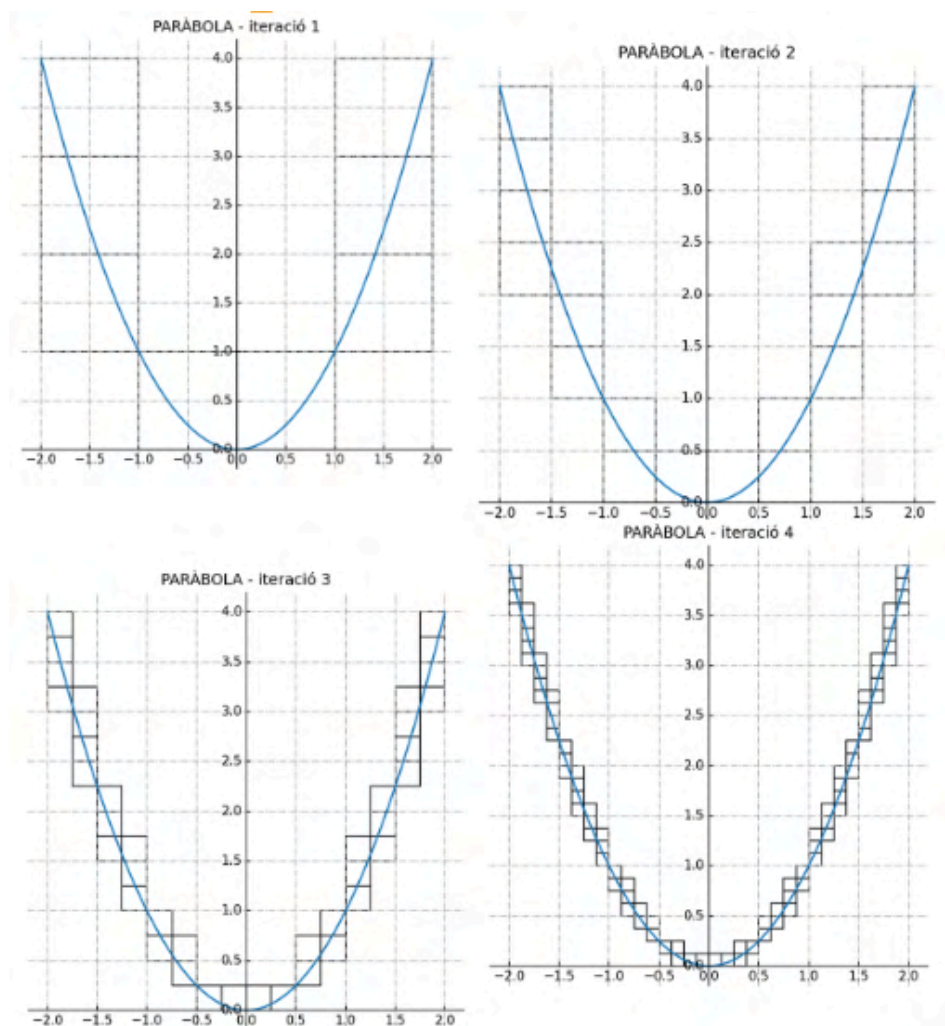


Figura 81: Dimensió fractal de la funció parabòlica.

La mitjana de les quatre dimensions fractals de la funció parabòlica dona com a resultat el valor d'1,17. Novament, si el procés es repetís infinites vegades, la dimensió tendiria a 1, per tant, la funció parabòlica seria 1, ja que la funció parabòlica tampoc és una fractal.

Malgratklj7k que no són fractals, els resultats de les funcions anteriors no donen 1, això passa perquè amb tan poques iteracions, cada quadrat té una línia corba en el seu interior, en conseqüència el nombre de quadrats amb funció és més alt que la mida de la graella. Però si s'aconseguís que els quadradets no tinguessin cap línia corba, aquests s'ajustarien perfectament al dibuix que defineix la funció, i el resultat seria 1. En el cas de les funcions anteriors, fent infinites iteracions, el resultat ja donaria 1. El que passa amb les fractals és que sempre hi ha línies corbes dins dels quadradets, encara que es divideixin infinites

vegades, pel fet que són línies totalment irregulars a infinites escales. Per tant, el resultat de la dimensió fractal no tendiria a 1 sinó a un nombre superior a 1.

Per a calcular la dimensió fractal de l'estany com s'ha dit s'ha hagut de passar la silueta en coordenades discretes, aquestes han servit per a definir l'estany en un gràfic, i a partir del programa s'ha pogut trobar la dimensió fractal a través de quatre iteracions, és a dir repetint quatre vegades tots els passos amb quadrats, cada un la meitat que l'anterior.

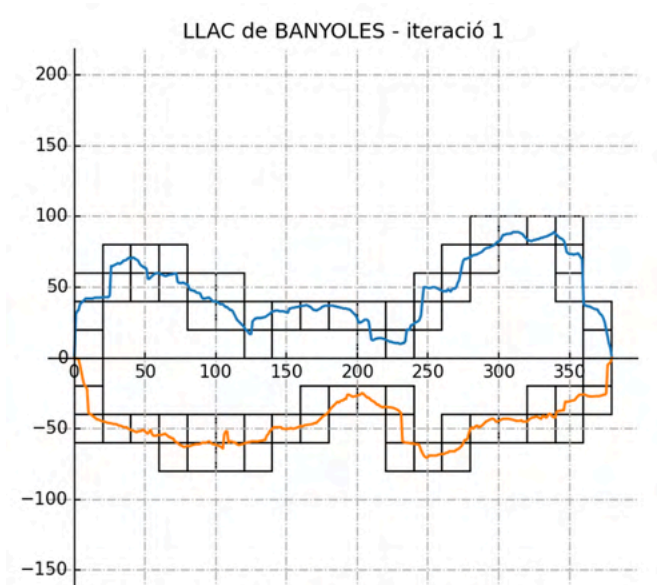


Figura 82: Primera iteració.

La primera iteració utilitza una quadrícula de costat 20 mm i obté el recobriment de la figura utilitzant quadrats de 20x20. És a dir 67 quadrats són necessaris per recobrir la costa de l'estany per a una dimensió de la graella de 19 quadrats de base.

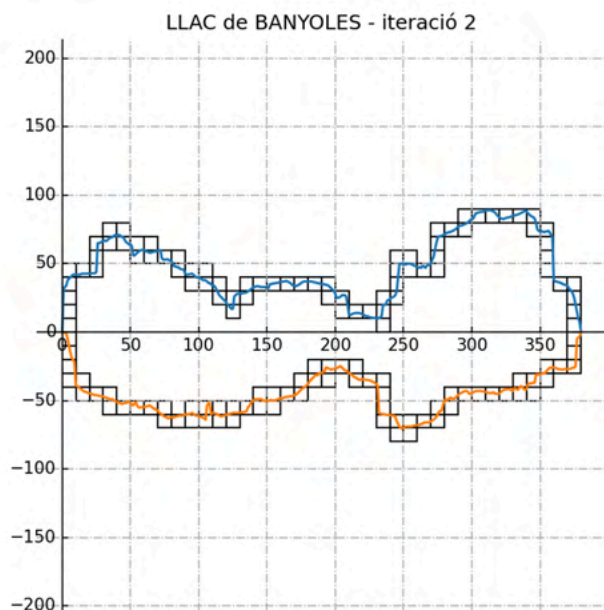


Figura 83: Segona iteració.

La segona iteració utilitza una quadrícula de costat 10 mm i obté el recobriment de la figura utilitzant quadrats de 10x10. És a dir 139 quadrats són necessaris per recobrir la costa de l'estany per a una dimensió de la graella de 38 quadrats de base.

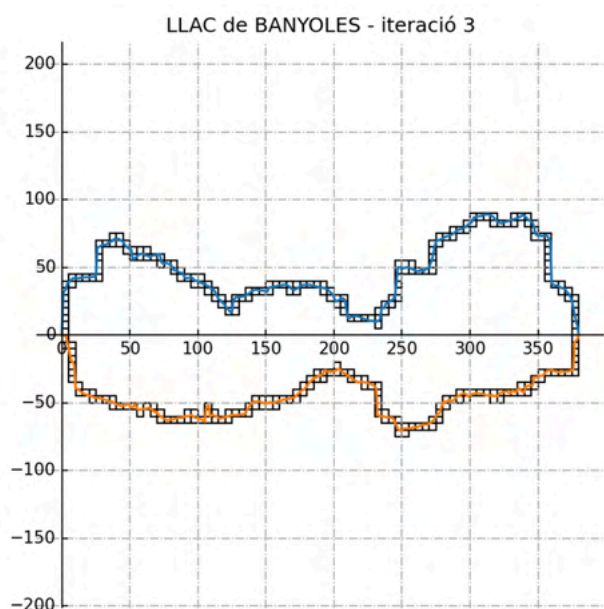


Figura 84: Tercera iteració.

La tercera iteració usa una quadrícula de costat 5 mm i assoleix el recobriment de la figura fent servir quadrats de 5x5. És a dir 284 quadrats són necessaris per recobrir la costa de l'estany per a una dimensió de la graella de 76 quadrats de base.

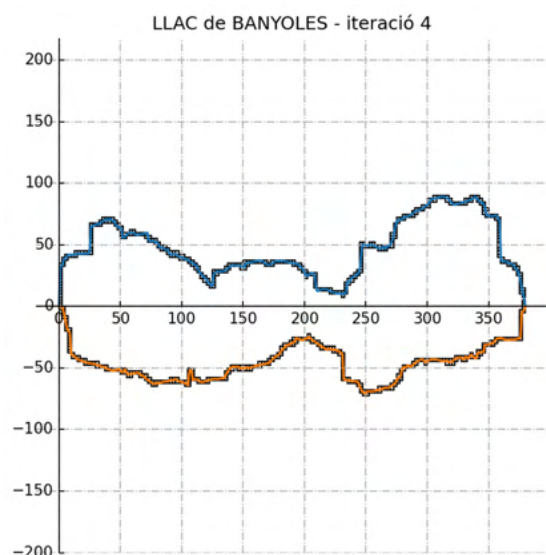


Figura 85: Quarta iteració.

La quarta iteració utilitza una quadrícula de costat 2,5 mm i obté el recobriment de la figura utilitzant quadrats de 2,5x2,5. És a dir 584 quadrats són necessaris per recobrir la costa de l'estany per a una dimensió de la graella de 152 quadrats de base.

Així es veu la quarta iteració des de més a prop:

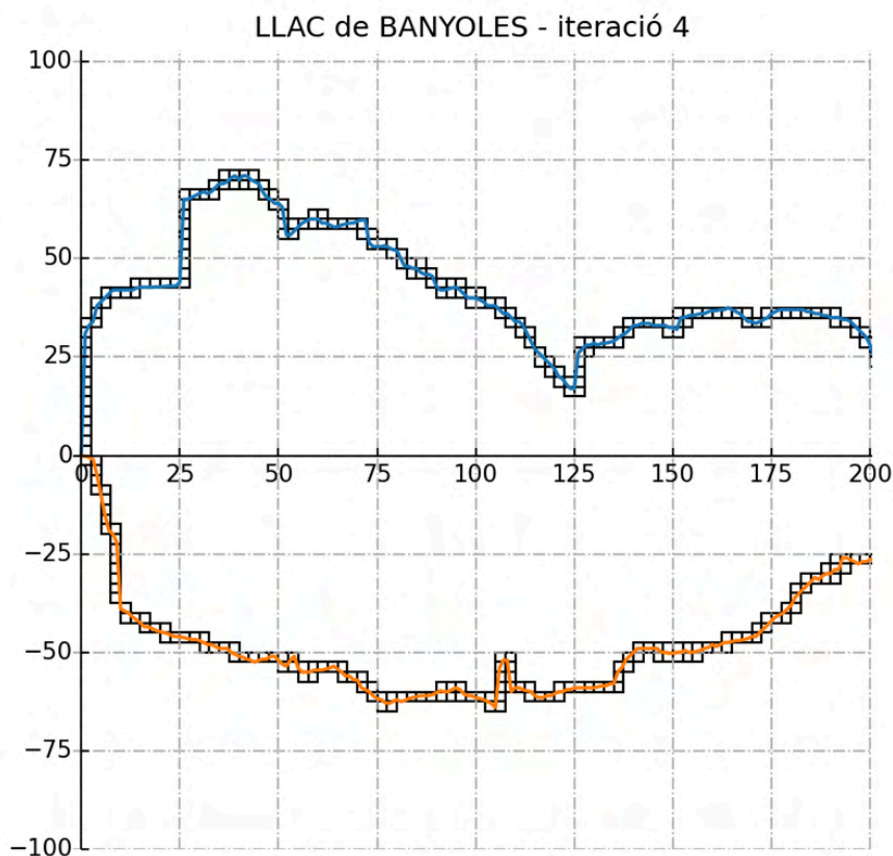


Figura 86: Quarta iteració des de més a prop.

Es poden veure els quadrats que es disposen al llarg del perímetre de l'estany.

Càlcul de la dimensió fractal:

En la taula que segueix es mostren les dades obtingudes i utilitzades pel càlcul.

iteració		1	2	3	4
mida de la graella (grid size)	dimR	19	38	76	152
número de quadrats recobrint la costa del llac	numQRok	67	139	284	584
log10 de la mida de la graella	log10(dimR)	1,278754	1,579784	1,880814	2,181844
log10 del número de quadrats recobrint la costa del llac	log10(numQRok)	1,826075	2,143015	2,453318	2,766413
ràtio	log10(numQRok)/log10(dimR)	1,428011	1,356524	1,304392	1,267924
				Dimensió Fractal	1,339213

Figura 87: Càlcul de la dimensió fractal de l'estany.

La mitjana de cada un dels càlculs de la dimensió fractal de l'estany de Banyoles mitjançant aquest mètode és d'1,34. Aquest resultat és molt més acurat que l'anterior, ja que no és tan proper a 1, per tant, es pot considerar que sí que ha donat dimensió fractal. És per això que el perímetre de l'estany tendeix a ser infinit, o almenys ho faria si no estigués limitat físicament per a les partícules subatòmiques. Aquest procés ha donat un nombre més precís perquè s'ha mesurat l'estany mil·límetre per mil·límetre en el paper A3, en conseqüència, s'ha pogut definir amb més precisió el perímetre de l'estany. A més el càlcul ha estat dut a terme per un programa informàtic, per tant, hi ha molt menys error que calculat a mà.

Una curiositat és que una vegada es va seleccionar la part pràctica, mentre se cercava si s'havia buscat alguna cosa semblant, es va trobar un estudi de l'institut Severo Ochoa (Dexeus, s.d.), on es va calcular la dimensió fractal de l'estany de Banyoles, però es va utilitzar un mètode molt poc definit, on simplement s'unien molt pocs punts de l'estany amb línies, i seguidament calculaven la dimensió fractal. No tenien en compte moltes de les curvatures que defineix l'estany. És molt semblant al mètode que s'ha usat amb Google Earth, però en aquest cas no es va resseguir bé el contorn de l'estany. Per tant, si en el nostre cas ja ha donat un resultat poc exacte, en el cas d'aquest treball, el resultat es va desviar molt de la realitat.



Figura 88: Treball previ de la dimensió fractal de l'estany.

En conseqüència, es podria dir que s'ha millorat la tècnica emprada i el resultat.

4. DISCUSSIÓ

En primer lloc, escollir una part pràctica per a un tema tan complex com l'infinit ha estat molt complicat i ha requerit molta recerca i informació, però finalment s'ha pogut trobar-ne un de prou interessant i el que és més important, un d'experimental.

A l'hora de crear fractals amb GeoGebra no hi ha hagut cap inconvenient, però les fractals podrien haver estat molt més definides si es tingués un ordinador molt potent per a processar tota la informació que requereix crear una fractal. Però com que l'únic objectiu era fer-les visibles, ha estat suficient.

Per acabar, el càlcul de la dimensió fractal de l'estany de Banyoles ha estat possible, i s'ha fet de dues maneres diferents. La primera, el càlcul a partir del Google Earth ha estat poc precís i hi ha hagut molt d'error a causa que s'ha mesurat el perímetre a ull a diferents escales, i per tant es poden haver comès molts errors, a més que la fotografia de Google Earth té molt de relleu i ombres, i hi ha zones que no es pot distingir bé si es tracta de l'estany o dels arbres. És per això que el resultat no ha estat prou satisfactori, tot i que ha donat un resultat superior a 1, per tant, el resultat continua sostenint que l'estany té dimensió fractal. Tot i això, també es va buscar una alternativa, que era fotografiar l'estany amb un dron, però es va desestimar pel fet que no es va trobar manera d'aconseguir-ne un. A més, el resultat hauria estat el mateix, la vegetació de l'estany hauria suposat un obstacle. En canvi, el segon mètode ha estat molt més a l'altura, ja que el resultat és menys pròxim a 1, demostrant en definitiva que l'estany té una dimensió fractal. Tanmateix, el resultat podria ser molt més exacte si el càlcul es fes a partir de més de quatre iteracions. No obstant això, cada vegada que es fa una iteració, la mida dels quadradets es divideix, per tant, un ordinador comú tardaria molt o inclús no podria processar totes les dades. A més, a l'hora de fer mesures, el perímetre de l'estany s'ha mesurat mil·límetre per mil·límetre, en conseqüència, entre cada mil·límetre no hi ha funció, i el programa ho interpola com a una línia recta, per tant, en aquest cas, com més iteracions, el resultat s'allunyaria més al d'una fractal. És per això que són les dades obtingudes el que limita la precisió del resultat.

5. CONCLUSIÓ

L'infinit és un concepte molt complex i complicat d'estudiar i representar, no obstant això, s'ha pogut treballar amb ell, comprendre'l des de les seves branques principals i extreure'n una part experimental prou satisfactòria. L'objectiu del treball era explorar el concepte d'infinit en els seus vessants principals (matemàtiques, física i filosofia) i, a partir de la representació gràfica de l'infinit que proporcionen les fractals, intentar crear-ne algunes amb el programa GeoGebra i mesurar la dimensió fractal de l'estany de Banyoles, si els càlculs apuntaven que en tenia.

En la part matemàtica se n'ha extret els teoremes més importants i les aplicacions més pràctiques que té l'infinit. Quant a la física, s'ha vist que l'infinit és impossible de representar físicament, i només serveix com a eina matemàtica, o bé, en els casos més extrems com la relativitat i la quàntica, s'ha d'utilitzar per a explicar alguns fenòmens. També s'ha observat que l'infinit ha estat estudiat per molts filòsofs i matemàtics, i cada un amb punts de vista diferents.

S'ha arribat a la conclusió que les fractals apunten a ser la branca més tangible i comprensible de l'infinit. És per això que potser la millor representació gràfica de l'infinit són les fractals. Al treball se n'han pogut recrear de diferents tipus i formes gràcies a GeoGebra. Crear fractals a través d'aquest programari ha resultat ser molt senzill, i es podrien generar moltes fractals i de ben diferents, depenent de la iteració que s'hi apliqui.

Quant a la dimensió fractal de l'estany, s'ha demostrat que l'estany de Banyoles sí que té dimensió fractal, i s'ha pogut trobar en dues ocasions, amb dos mètodes diferents, però amb resultats també molt diferents. El resultat d'1,34 obtingut amb el programa informàtic ha estat molt més satisfactori que l'obtingut mitjançant Google Earth d'1,087, que supera per molt poc l'1. No només s'ha trobat una nova manera per a buscar la dimensió fractal sinó que s'ha millorat el resultat. El primer mètode emparat (mesurar el perímetre de l'estany a diferents escales —90, 200, 400 i 1000 metres— a través de Google Earth) no ha estat el millor mètode, en canvi, el segon (convertir el perímetre de l'estany en funció i passar la silueta a coordenades en una gràfica, quadriculant-la en quatre iteracions cada vegada més petites) ha estat el més eficient, tot i que requereix més temps. A més s'ha millorat i superat un treball ja existent que en una part es calcula la dimensió fractal de l'estany de Banyoles, però amb una tècnica molt rudimentària.

En haver obtingut resultats tan diversos, no es pot concloure amb seguretat quina és la dimensió fractal exacta de l'estany. Però el que es pot assegurar és que sí que té dimensió fractal.

6. BIBLIOGRAFIA

Aventuras Matemáticas. (2011, 20 gener). *Números complejos, iteraciones y fractales*.
<http://alfonso11mates.blogspot.com/2011/01/numeros-complejos-iteraciones-y.html>

Balsas, Álvaro. (2019). El infinito desde la física. Pensamiento. *Revista De Investigación E Información Filosófica*, 75(283 S.Esp), 5–28.
<https://doi.org/10.14422/pen.v75.i283.y2019.001>

Carlos Ortiz de Landázuri. (2009, 6 maig). El infinito cuántico y relativista. Hacia una revisión de Planck y Einstein después de Bell. (A través de Heisenberg, De Finetti, Ulam y Neumann, Chandrasekhar, Hawking y Penrose). *Ontology Studies* 10, 2010 101-114.
<https://raco.cat/index.php/Ontology/article/view/245078/328233>

Dexeus, Josefina. (s.d.). *THE GEOMETRY OF NATURE: FRACTALS*. IES Severo Ochoa.

Forat de cuc. (2022, 4 desembre). *Viquipèdia*.
https://ca.wikipedia.org/wiki/Forat_de_cuc

Halperin, Jonathan, i Takahashi, Drew. (2022). *A trip to infinity*. MakeMake Entertainment, Room 608. Distributor: Netflix

McGarry Furriol, Jan. (2021, 2 març). *Realitzacions homotòpiques dels infinits grupoides (TFG)*.
https://mat.ub.edu/docsec/documents/resum_TFG_Ian_McGarry.pdf

Mike. [Mates Mike]. (2020, 3 desembre). *La Paradoja del Hotel Con Infinitos Huéspedes* [Video]. YouTube.
<https://www.youtube.com/watch?v=GejDsZ0MDrA>

Mike. [Mates Mike]. (2020, 15 desembre). *¿Cómo de Grande es el Infinito?* ∞ [Video]. YouTube.
<https://www.youtube.com/watch?v=jWRTEKTrZrk>

Mike. [Mates Mike]. (2020, 21 desembre). *Hay Infinitos Más Grandes que Otros* [Video]. YouTube.
<https://www.youtube.com/watch?v=YJ4WiN0RmF0&t=216s>

Mike. [Mates Mike]. (2020, 4 gener). *EL PROBLEMA INDEMOSTRABLE ~ Saga del Infinito Parte FINAL* [Video]. YouTube.
<https://www.youtube.com/watch?v=7nUbFG1wpnE&t=427s>

Miranda Molina, Rafael. [Rafael Miranda Molina]. (2011, 24 novembre). *Conjunto de Mandelbrot en Geogebra (deslizador)* [Video]. YouTube.
<https://www.youtube.com/watch?v=HyxIRdPk4Z8>

National Geographic. (2009, 11 decembre). *La banda de Möbius: fácil de crear, difícil de comprender.*
<https://www.nationalgeographic.es/espacio/agujeros-negros>

Nucleares. (1997, 30 juliol). *El principio de Incertidumbre de Heisenberg.*
<https://www.nucleares.unam.mx/~vieyra/node20.html>

Saenz de Cabezón, Eduardo. (2016, 1 març). *Inteligencia matemática.* Plataforma.

Unicoos. (2021, 19 gener). *La banda de Möbius: fácil de crear, difícil de comprender.*
<https://www.unicoos.com/blog/banda-de-mobius/>

Weistreich, Guillermo. (2020, 1 novembre). Tipos de fractales. *Economipedia.*
<https://economipedia.com/definiciones/tipos-de-fractales.html>

7. ÍNDEX D'IL·LUSTRACIONS

• Figura 1: Cursa d'Aquil·les i la tortuga. Font: (Viquipèdia).....	5
• Figura 2: Serp que es mossega la cua. (123RF).....	6
• Figura 3: Serp Jörmungandr. Font: (Vikiingos).....	6
• Figura 4: Funció lemniscata. Font: (Wikipedia).....	7
• Figura 5: Analema Solar. Font: (Viquipèdia).....	7
• Figura 6: Funció Exponencial. Font: (Pròpia).....	12
• Figura 7: Funció Logarítmica. Font: (Pròpia).....	12
• Figura 8: Funcions Exponencial i Logarítmica comparades. Font: (Pròpia).....	13
• Figura 9: Funció polinòmica Grau 2. Font: (Pròpia).....	14
• Figura 10: Funció polinòmica Grau 10. Font: (Pròpia).....	14
• Figura 11: Funcions Polinòmiques de gra 2 i 10 comparades. Font: (Pròpia).....	14
• Figura 12: Funció factorial. Font: (Pròpia).....	14
• Figura 13: Funció exponencial. Font: (Pròpia).....	14
• Figura 14: Funcions Exponencial i Factorial comparades. Font: (Pròpia).....	15
• Figura 15: Classificació dels tipus de nombres. Font: (Economipedia).....	17
• Figura 16: Emparellament entre els nombres enters i els naturals. Font: (Mates Mike).....	18
• Figura 17: Emparellament entre els nombres naturals i els racionals. Font: (Mates Mike).....	18
• Figura 18: Emparellament entre els nombres reals i l'interval (0,1). Font: (Mates Mike).....	19
• Figura 19: Emparellament dels nombres naturals amb els nombres de l'interval (0,1). Font: (Mates Mike).....	20
• Figura 20: Extracció d'un nombre fora de l'emparellament. Font: (Mates Mike).....	21
• Figura 21: Cinta de Möbius. Font: (Viquipèdia).....	23
• Figura 22: Banya de Gabriel. Font: (Viquipèdia).....	24
• Figura 23: Col Romanesco. Font: (Rtve.es).....	25
• Figura 24: Fractal lineal. Font: (Enconomipedia).....	26
• Figura 25: Fractal de funció iterada. Font: (Economipedia).....	26
• Figura 26: Fractal de Mandelbrot. Font: (Economipedia).....	26
• Figura 27: Òrbita caòtica. Font: (Economipedia).....	27
• Figura 28: Fractal de plasma. Font: (Economipedia).....	27
• Figura 29: Autòmat cel·lular. Font: (Phd).....	28
• Figura 30: Fractal complexa de tres dimensions. Font: (PeakPx).....	28

• Figura 31: Fractal de funció iterada de tres dimensions. Font: (Wikimedia commons)	28
• Figura 32: Multivers. Font: (Univision)	31
• Figura 33: Deformació de l'espai-temps causada per un forat negre. Font: (El sol de la puebla)	32
• Figura 34: Forat negre. Font: (VilaWeb)	32
• Figura 35: Representació d'un forat de cuc. Font: (Viquipèdia)	33
• Figura 36: Representació de la interacció entre quarks i gluons. Font: (ScienceFacts)	34
• Figura 37: Anaximandre. Font: (Viquipèdia)	36
• Figura 38: Parmènides. Font: (Viquipèdia)	37
• Figura 39: Anaxàgores. Font: (Viquipèdia)	37
• Figura 40: Zenó. Font: (Viquipèdia)	38
• Figura 41: Aristòtil. Font: (Viquipèdia)	38
• Figura 42: Arquimedes. Font: (Viquipèdia)	39
• Figura 43: Pascal. Font: (Viquipèdia)	39
• Figura 44: Kant. Font: (Viquipèdia)	40
• Figura 45: Georg Hegel. Font: (Viquipèdia)	41
• Figura 46: Georg Cantor. Font: (Viquipèdia)	41
• Figura 47: Gottlob Frege. Font: (Viquipèdia)	42
• Figura 48: David Hilbert. Font: (Viquipèdia)	43
• Figura 49: Martin Heidegger. Font: (Viquipèdia)	43
• Figura 50: Teilhard de Chardin. Font: (Viquipèdia)	44
• Figura 51: Emmanuel Levinas. Font: (Viquipèdia)	45
• Figura 52: Jaques Derrida. Font: (Viquipèdia)	45
• Figura 53: Jean-Luc Marion. Font: (Viquipèdia)	46
• Figura 54: Vector d'un nombre complex. Font: (Pròpia)	49
• Figura 55: Barra d'eines. Font: (Pròpia)	50
• Figura 56: Selecció del full de càlcul. Font: (Pròpia)	50
• Figura 57: Numeració de caselles. Font: (Pròpia)	51
• Figura 58: Selecció del punt lliscant. Font: (Pròpia)	52
• Figura 59: Configuració del punt lliscant. Font: (Pròpia)	52
• Figura 60: Configuració de la columna B. Font: (Pròpia)	53
• Figura 61: Configuració de la columna. Font: (Pròpia)	54
• Figura 62: Selecció de totes les caselles. Font: (Pròpia)	55
• Figura 63: Repetició a l'eix negatiu. Font: (Pròpia)	56
• Figura 64: Configuració del color. Font: (Pròpia)	56

• Figura 65: Creació de la fractal. Font: (Pròpia).....	57
• Figura 66: Fractal de Mandelbrot creada. Font: (Pròpia).....	57
• Figura 67: Fractal cosinus. Font: (Pròpia).....	58
• Figura 68: Fractal sinus. Font: (Pròpia).....	59
• Figura 69: Fractal de creació pròpia. Font: (Pròpia).....	59
• Figura 70: Fractal de creació pròpia. Font: (Pròpia).....	60
• Figura 71: Perímetre de l'estany. Font: (Google Earth).....	62
• Figura 72: Referències de les escales. Font: (Google Earth).....	63
• Figura 73: Càlcul de les unitats del perímetre. Font: (Pròpia).....	63
• Figura 74: Càlcul de la "N". Font: (Pròpia).....	63
• Figura 75: Càlcul de la "S". Font: (Pròpia).....	64
• Figura 76: Càlcul de la dimensió fractal. Font: (Pròpia).....	64
• Figura 77: Mesures de l'estany de Banyoles. Font: (Pròpia).....	65
• Figura 78: Estany passat a funció matemàtica. Font: (Pròpia).....	66
• Figura 79: Dimensió fractal d'una recta. Font: (Pròpia).....	67
• Figura 80: Dimensió fractal de la gràfica sinus. Font: (Pròpia).....	68
• Figura 81: Dimensió fractal de la funció parabòlica. Font: (Pròpia).....	69
• Figura 82: Primera iteració. Font: (Pròpia).....	70
• Figura 83: Segona iteració. Font: (Pròpia).....	71
• Figura 84: Tercera iteració. Font: (Pròpia).....	71
• Figura 85: Quarta iteració. Font: (Pròpia).....	72
• Figura 86: Quarta iteració des de més a prop. Font: (Pròpia).....	72
• Figura 87: Càlcul de la dimensió fractal de l'estany. Font: (Pròpia).....	73
• Figura 88: Treball previ de la dimensió fractal de l'estany. Font: (Lesson Plan 6: Fractals).....	74
• Figura 89: Mesura del perímetre de l'Estany, escala 1000m. Font: (Google Earth).....	82
• Figura 90: Mesura del perímetre de l'Estany, escala 400m. Font: (Google Earth).....	82
• Figura 91: Silueta de l'estany de Banyoles i Porqueres. Font: (Alamy).....	83
• Figura 92: Càlcul de la dimensió fractal de l'estany de Banyoles i Porqueres. Font: (Pròpia).....	83
• Figura 93: Càlcul de la dimensió fractal de la funció parabòlica. Font: (Pròpia).....	84
• Figura 94: Càlcul de la dimensió fractal de la funció sinus. Font: (Pròpia).....	84
• Figura 95: Càlcul de la dimensió fractal de la funció lineal. Font: (Pròpia).....	84
• Figura 96: Càlcul de la dimensió fractal de la funció lineal. Font: (Pròpia).....	85
• Figura 97: Taula de coordenades de l'estany de Banyoles i Porqueres. Font: (Pròpia).....	85

8. ANNEXOS

Annex I —Mesures del perímetre de l'estany

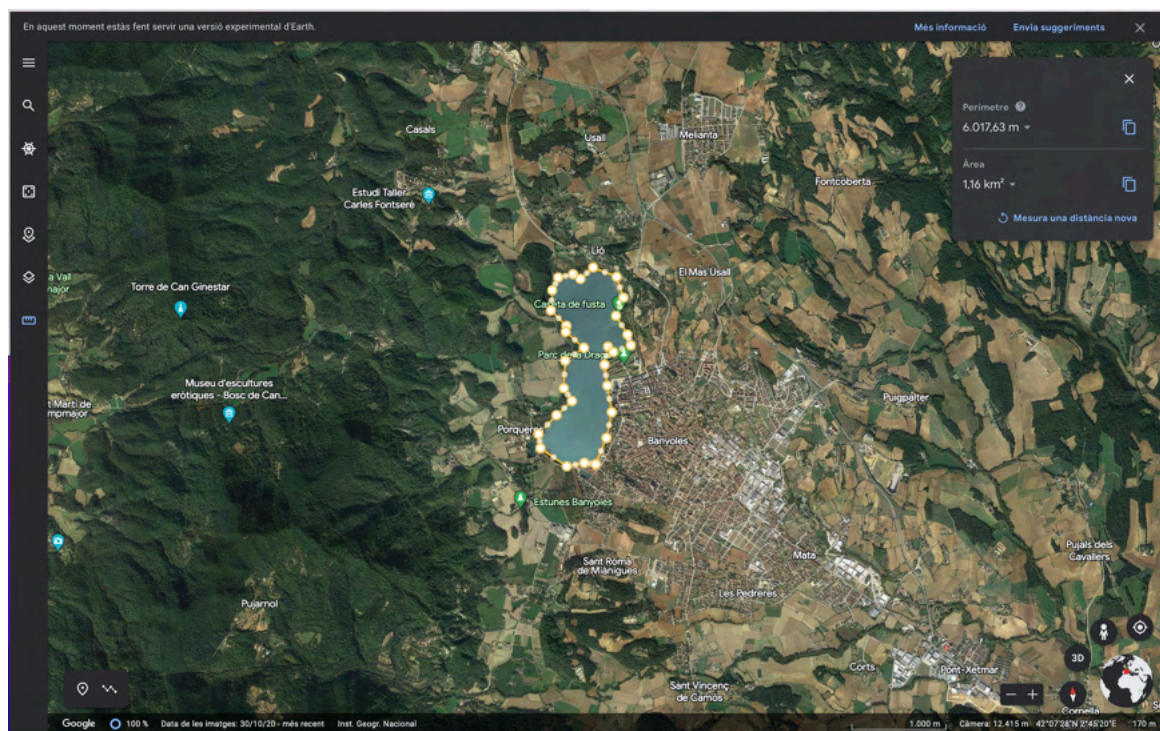


Figura 89: Mesura del perímetre de l'Estany, escala 1000m.

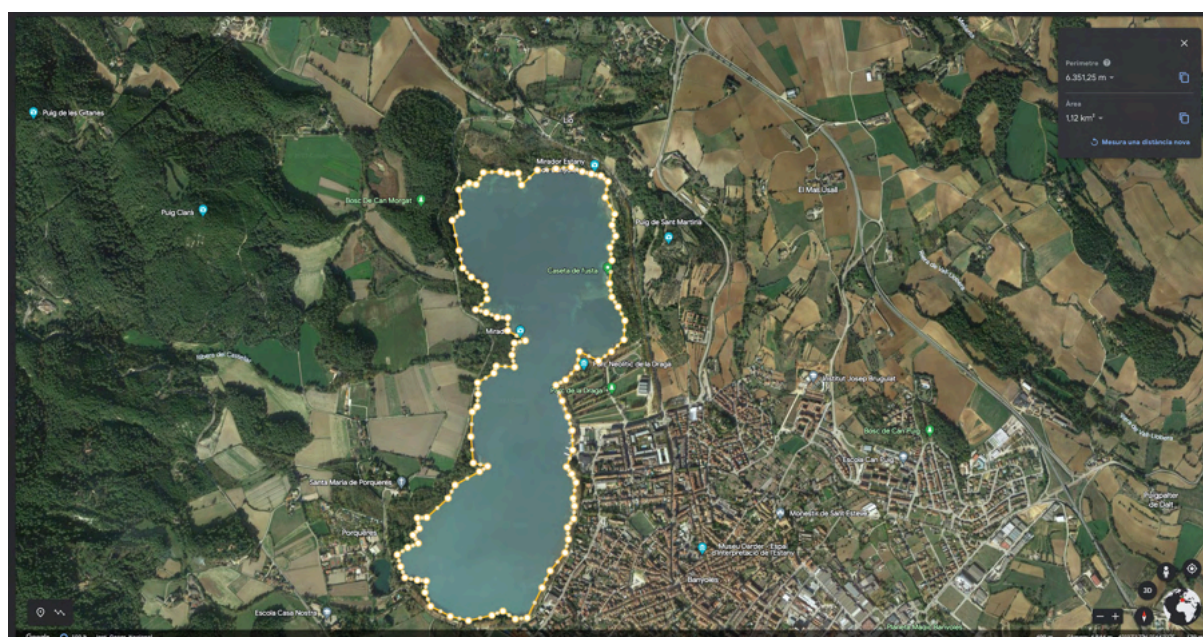


Figura 90: Mesura del perímetre de l'Estany, escala 400m.

Annex II —Silueta de l'estany de Banyoles i Porqueres

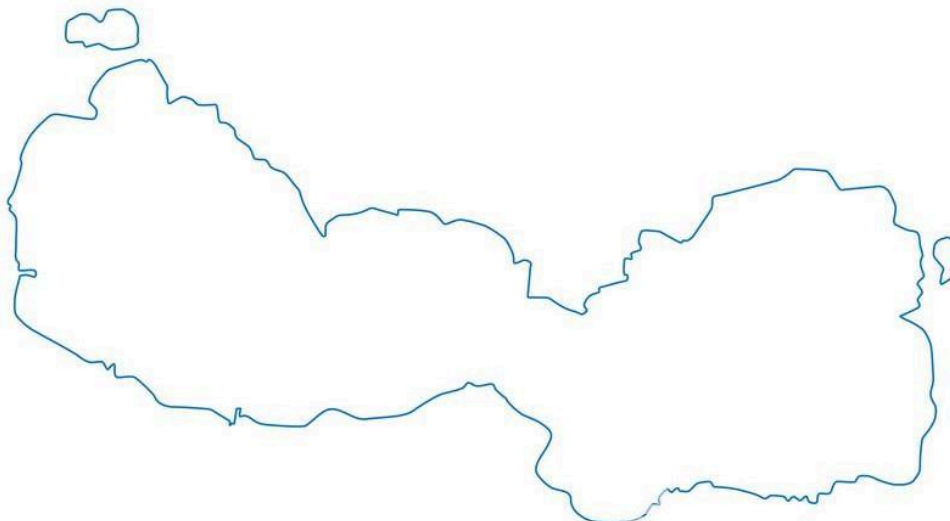


Figura 91: Silueta de l'estany de Banyoles i Porqueres.

Annex III —Càlcul de la dimensió fractal de l'estany

Escala(m)	L1	L2	L3	Mitjana L	Unitats		
90,000	7544,490	7498,830	7532,600	7525,307	83,615		
200,000	6403,840	6420,320	6395,700	6406,620	32,033		
400,000	6351,250	6318,540	6354,120	6341,303	15,853		
1000,000	6017,630	6003,430	6020,760	6013,940	6,014		
Càlcul:							
Escales	L	I	N(I/L)	M	m	S(M/m)	Dimensió fractal = logN/logS
1000-90	6,014	83,615	13,903	1000,000	90,000	11,111	1,093
1000-200	6,014	32,033	5,326	1000,000	200,000	5,000	1,039
1000-400	6,014	15,853	2,636	1000,000	400,000	2,500	1,058
400-200	15,853	32,033	2,021	400,000	200,000	2,000	1,015
400-90	15,853	83,615	5,274	400,000	90,000	4,444	1,115
200-90	32,033	83,615	2,610	200,000	90,000	2,222	1,202
							1,087

Figura 92: Càlcul de la dimensió fractal de l'estany de Banyoles i Porqueres.

Annex IV —Càlculs de les dimensions fractals amb el programa Python

Funció parabòlica:

iteració	1	2	3	4
mida de la graella (grid size)	6	12	24	48
número de quadrats recobrint la paràbola	8	20	40	88
log10 de la mida de la graella	0,778151	1,079181	1,380211	1,681241
log10 del número de quadrats recobrint la paràbola	0,903090	1,301030	1,602060	1,944483
ràtio	1,160558	1,205571	1,160735	1,156576
Dimensió Fractal				1,170860

Figura 93: càlcul de la dimensió fractal de la funció parabòlica.

Funció sinus:

iteració	1	2	3	4
mida de la graella (grid size)	4	8	16	32
número de quadrats recobrint la sinusoide	4	16	32	80
log10 de la mida de la graella	0,602060	0,903090	1,204120	1,505150
log10 del número de quadrats recobrint la sinusoide	0,602060	1,204120	1,505150	1,903090
ràtio	1,000000	1,333333	1,250000	1,264386
Dimensió Fractal				1,211930

Figura 94: càlcul de la dimensió fractal de la funció sinus.

Funció lineal

iteració	1	2	3	4
numQR	16	64	256	1024
numQRx	4	8	16	32
numQRy	4	8	16	32
dimR	4	8	16	32
exp10dimR	0,60205999	0,90308999	1,20411998	1,50514998
numQRok	4	8	16	32
exp10numQRok	0,60205999	0,90308999	1,20411998	1,50514998
ratio	1	1	1	1

Figura 95: càlcul de la dimensió fractal de la funció lineal.

5	6	7	8	9	10
4096	16384	65536	262144	1048576	4194304
64	128	256	512	1024	2048
64	128	256	512	1024	2048
64	128	256	512	1024	2048
1,80617997	2,10720997	2,40823997	2,70926996	3,01029996	3,31132995
64	128	256	512	1024	2048
1,80617997	2,10720997	2,40823997	2,70926996	3,01029996	3,31132995
1	1	1	1	1	1

Figura 96: càlcul de la dimensió fractal de la funció lineal.

Annex V —Taula de coordenades de l'estany de Banyoles i Porqueres

0	0	0
1	31	-0,25
2	33	-0,5
3	34	-1
4	38	-5
5	39	-10
6	40	-15
7	41	-19
8	42	-20
9	42	-22
10	42	-39
11	42	-39,5
12	42	-40
13	42	-41
14	42,5	-41,75
15	42,7	-42,5
16	42,7	-43,5
17	42,7	-43,5
18	42,7	-44
19	42,8	-44,5
20	42,8	-44,75
21	42,9	-45
22	43	-45,25
23	43	-45,75
24	43	-46

25	44	-46
26	65	-46,25
27	65	-46,5
28	65,5	-46,75
29	66	-46,75
30	66,5	-47
31	67	-47,5
32	66,5	-48
33	67	-48
34	68	-48,5
35	69	-49
36	69	-49
37	69,5	-49
38	70,5	-50
39	71	-50,5
40	70	-51
41	71	-51,25
42	71	-51,75
43	70	-52
44	69,5	-52,5
45	69	-52
46	67	-51,75
47	65,5	-51,75
48	65	-51
49	64	-51
50	64	-52
51	63	-53
52	56	-53,5
53	56	-52
54	57	-51
55	58	-54
56	59	-55
57	59,5	-55
58	60	-55
59	60	-54,5
60	60	-54,5
61	59	-54,5

62	59	-54,25
63	58,5	-54
64	58	-53,5
65	58	-54,25
66	58,5	-55
67	58,75	-56
68	59	-56
69	59	-57
70	59,5	-57
71	59,75	-59
72	59,8	-59,5
73	54	-60
74	53	-61
75	53	-61,75
76	53	-62
77	53,25	-62,75
78	52,75	-63
79	52,25	-62,5
80	52	-62
81	50	-62,5
82	48	-62,25
83	48	-61,75
84	47,5	-61,5
85	47,5	-61,25
86	46,5	-61
87	46	-61
88	46	-61
89	45,5	-60,75
90	43	-60,25
91	42	-59,75
92	42	-60
93	42,25	-60
94	42,5	-59,5
95	42,75	-59
96	42	-59,5
97	41	-60,5
98	40	-61

99	40	-61
100	40	-61,5
101	39,5	-61,75
102	39	-62
103	38	-62,5
104	38	-63
105	38	-64
106	37	-54
107	36	-52
108	36	-52
109	35	-60
110	34	-59
111	34	-59
112	33	-59,5
113	31	-59,75
114	29	-60
115	27	-61
116	26	-61,5
117	25	-61,5
118	24	-61
119	23	-61
120	22	-60,5
121	20	-60
122	19,5	-60
123	18	-59,5
124	17	-59,5
125	17	-59
126	26	-59
127	27	-59
128	28	-59
129	28	-59
130	28,5	-59
131	28	-58,75
132	28,5	-58,5
133	28,5	-58,5
134	28,75	-58
135	29	-58

136	29,75	-55
137	30,5	-54
138	31	-52
139	32	-51
140	33	-50
141	33	-49
142	33,5	-49
143	33,5	-49
144	33,5	-49
145	33	-49
146	33	-49
147	33	-50
148	33	-50
149	32,5	-50,25
150	32,5	-50,25
151	32	-50
152	35	-50
153	35	-49,5
154	35,5	-50
155	35,5	-50
156	35,75	-49,75
157	36	-49,5
158	36	-49
159	36,5	-48,75
160	36,75	-48
161	36,75	-48,5
162	37	-48
163	37	-47,5
164	37,5	-47,5
165	37	-47,25
166	36,5	-47
167	36	-47
168	35	-46,75
169	34	-46,5
170	34	-46
171	33,5	-46
172	34	-45

173	34,5	-44
174	35	-43
175	36	-42
176	36,5	-41
177	37	-40,5
178	37	-40
179	37	-39
180	37	-38
181	37	-36
182	37	-35
183	37	-34
184	36,5	-33
185	36,5	-32
186	36	-31
187	36	-31,5
188	35,5	-30,5
189	35,5	-30
190	35	-30
191	35	-29
192	35	-29
193	34,5	-26
194	34,5	-26
195	34	-26,5
196	33	-27
197	32	-27,5
198	31	-27
199	30	-27
200	28	-26,5
201	25	-26,25
202	25	-26
203	25,5	-25
204	26	-25
205	27	-26
206	27	-27
207	27	-28
208	26	-28
209	20	-29

210	13	-30
211	12,5	-30,5
212	13	-31
213	13,5	-32
214	13,75	-33
215	14	-33
216	14	-34
217	14	-34,5
218	13,75	-35
219	13,5	-34,5
220	13	-34,5
221	12,5	-34,75
222	12	-34,75
223	11,5	-35
224	11,5	-35
225	11	-35,25
226	10,75	-35,5
227	10,5	-36
228	10,5	-36,5
229	10,5	-37
230	10	-38
231	10	-39
232	10,5	-59
233	10,5	-59,5
234	12	-59,75
235	20	-60
236	20	-60
237	20	-60,25
238	23	-60,5
239	23,5	-60,5
240	24	-60,5
241	25	-61
242	25,5	-61
243	26	-61
244	27	-62
245	30	-65
246	40	-67

247	50	-69
248	50	-70
249	50	-70,5
250	49,5	-70
251	49,5	-69
252	49,5	-69
253	50	-69
254	50	-69
255	50	-69
256	49,5	-69
257	49	-68,5
258	48,5	-68,25
259	48	-68
260	47,5	-68
261	47	-68
262	47,5	-67,5
263	47	-67
264	48,5	-67
265	48	-66
266	47	-66
267	48,5	-66
268	49	-66
269	49	-66
270	50	-65
271	53	-64,5
272	55	-64
273	60	-63
274	65	-62
275	69	-60
276	70	-58
277	70	-58
278	70,5	-57
279	71	-53
280	71	-50
281	72,5	-49
282	72,5	-50
283	73	-49

284	73	-48
285	73,5	-48
286	74	-49
287	74,5	-48,5
288	75	-48
289	76	-47
290	77	-46
291	77,5	-45
292	78	-44,5
293	78	-44
294	78,5	-43,5
295	79	-43
296	79,5	-43
297	80	-43,5
298	81	-45
299	82	-45
300	82,5	-44,5
301	83	-44
302	85	-43,5
303	87	-43
304	87	-43
305	87,5	-43
306	87,75	-43
307	87,75	-43
308	88	-43,25
309	88	-43,5
310	89	-43,75
311	89	-44
312	89	-44,5
313	89	-44,5
314	89	-44,5
315	88,5	-44,5
316	88	-44
317	87,5	-45
318	86	-45
319	85	-45
320	84	-45

321	83	-44
322	83	-43
323	82,5	-42,5
324	83	-42
325	83,5	-42
326	83,5	-41,5
327	84	-41,5
328	84	-42
329	84,5	-42,5
330	85	-43
331	85	-41
332	85,5	-41
333	85,75	-42
334	86	-42
335	86,5	-40
336	87	-39,5
337	87,5	-40
338	88	-41,5
339	89	-42
340	88	-42
341	87	-38
342	86	-37,5
343	85	-37,5
344	84,5	-37,25
345	84	-37
346	83	-37
347	80	-31
348	75	-31
349	74	-31
350	73,5	-30,75
351	73,5	-30,5
352	73,5	-30
353	73	-30
354	73,5	-29,5
355	73,5	-28
356	74	-27
357	73	-26

358	71	-26
359	70	-26
360	38,5	-25,75
361	37	-26
362	37	-26,5
363	36,5	-27
364	36,5	-27
365	36	-27,25
366	35,5	-27,25
367	35	-27,25
368	34,5	-27
369	34,5	-27
370	34	-27
371	32	-27
372	31	-26,75
373	30	-26,5
374	28	-26
375	25	-26
376	20	-25
377	15	-5
378	10	-4
379	7	-3
380	0	0

Figura 97: Taula de coordenades de l'estany de Banyoles i Porqueres.